Dinámica

MATEMÁTICA

LIBRO CARPETA

4

puerto de palos

Gerente editorial
Daniel Arroyo

Jefe del área de Matemática
Gabriel H. Lagoa

Autoras
Sandra Barrutia
Mariel Strahman
Alicia Tabaj

Corrector de estilo
Gabriel Valeiras

Coordinadora del Departamento de Arte y Diseño
María Natalia Bellini

Diagramación
Inés Rossano

Fotografías
Archivo Multimedia Macmillan Education
123rf

Barrutia, Sandra
Dinámica Matemática 4 / Sandra Barrutia ; Mariel Strahman ; Alicia Tabaj. - 1a ed. 1a. reimp. - Boulogne : Puerto de Palos, 2022.
224 p. ; 28 x 20 cm.
ISBN 978-987-764-472-2
1. Matemática. 2. Educación Secundaria. I. Strahman, Mariel. II. Tabaj, Alicia. III. Título.
CDD 510.712

© Editorial Estrada S. A. 2021

Av. Blanco Encalada 104 - San Isidro,

Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723

Impreso en la Argentina/Printed in Argentina.

ISBN 978-987-764-472-2

Los sitios y páginas de Internet han sido consultados durante el mes de octubre de 2021.
La presente obra se ha elaborado teniendo en cuenta los aportes surgidos de los encuentros organizados por el Instituto Nacional contra la Discriminación, la Xenofobia y el Racismo (Inadi) con los editores de texto.
Se utiliza el masculino como genérico para evitar la sobrecarga gráfica de escribir el femenino y el masculino en cada nominación. Esta decisión responde únicamente a una simplificación gráfica, dado que desde nuestro sello editorial promovemos la igualdad de género en todos los ámbitos.No se permite la reproducción parcial o total, el almacenamiento, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización y otros métodos, sin el permiso previo del editor.
Su infracción está penada por las leyes 11.723 y 25.446.

Primera edición, primera reimpresión.
Esta obra se terminó de imprimir en octubre de 2022, en Arcángel Maggio – División libros, Lafayette 1695,
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

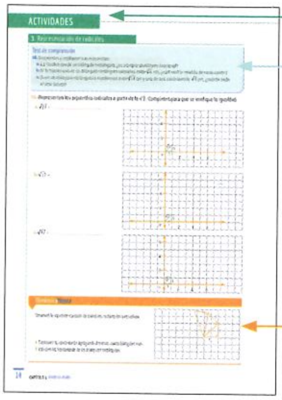
Dinámica Matemática 4

Es una nueva propuesta que facilita el aprendizaje de la matemática a través de 680 actividades que favorecen la comprensión de los distintos temas.

SABERES DINÁMICOS se presentan definiciones, clasificaciones, procedimientos básicos y ejemplos de cada contenido que facilitan la comprensión.

Dinámica TConecta se presentan enlaces web con demostraciones, ejemplos, procedimientos, etcétera.

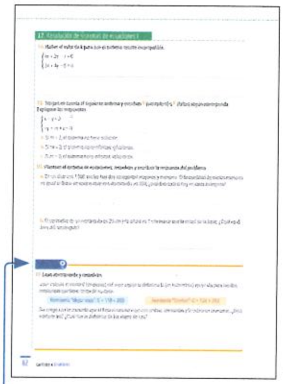
Áreas dinámicas [Matemática y...] se integran contenidos del área con saberes de otras áreas.



ACTIVIDADES para cada tema se proponen distintas actividades que están relacionadas de manera secuencial.

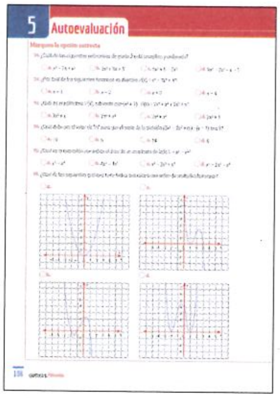
TEST DE COMPRENSIÓN se presentan preguntas básicas que permiten evaluar la comprensión de la teoría y trabajar sobre errores frecuentes.

DinámicaMente propone situaciones problemáticas con un mayor nivel de complejidad.

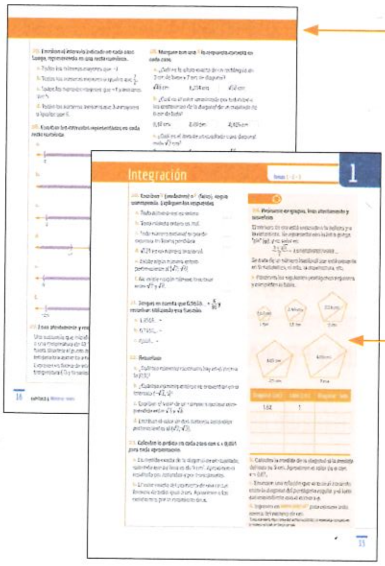


actividades del estilo de las evaluaciones educativas nacionales e internacionales.

explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades.



Autoevaluación incluye más actividades para que cada alumno pueda evaluar los conocimientos adquiridos durante el capítulo.



Integración incluye más actividades para resolver en la carpeta.

actividades para realizar en grupos.

Trabajo con capacidades

En todos los capítulos se ofrecen variadas actividades orientadas a desarrollar valores y habilidades del ciudadano del siglo XXI.

ÍNDICE

Capítulo 1: NÚMEROS REALES

1. Números racionales y las expresiones decimales 5
2. Números reales 9
3. Representación de radicales 13
   Integración 1-2-3 15
4. Ecuaciones e inecuaciones 17
5. Módulo de un número real 19
6. Ecuaciones e inecuaciones con módulo 21
   Integración final 23
   Para recordar 25
   Autoevaluación 26

Capítulo 2: OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

7. Propiedades de la potenciación y radicación 27
8. Radicales. Adición y sustracción 29
9. Multiplicación y división de radicales 31
10. Operaciones combinadas 33
11. Racionalización de denominadores 37
   Integración final 41
   Para recordar 43
   Autoevaluación 44

Capítulo 3: SUCESIONES

12. Sucesiones 45
13. Sucesiones aritméticas 47
14. Sucesiones geométricas 49
   Integración final 51
   Para recordar 53
   Autoevaluación 54

Capítulo 4: ECUACIONES

15. Ecuaciones de primer grado 55
16. Sistemas de ecuaciones lineales. Método gráfico 57
17. Resolución de sistemas de ecuaciones I 59
18. Resolución de sistemas de ecuaciones II 63
   Integración 15-16-17-18 65
19. Ecuaciones de segundo grado 67
20. Sistemas de ecuaciones mixtos 71
21. La parábola como lugar geométrico 75
22. Ecuación de la parábola 77
   Integración final 79
   Para recordar 81
   Autoevaluación 82

Capítulo 5: POLINOMIOS

23. Polinomios. Características 83
24. Suma y resta de polinomios 85
25. Multiplicación de polinomios. Potencia 87
   Integración 23-24-25 91
26. División de polinomios 93
27. La regla de Ruffini. Teorema del resto 97
28. Operaciones combinadas entre polinomios 99
29. Introducción a la función polinómica 103
   Integración final 105
   Para recordar 107
   Autoevaluación 108

Capítulo 6: FACTORIZACIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

30. Factor común y factor común por grupos 109
31. Trinomio cuadrado perfecto y cuatrinomio cubo perfecto 111
32. Suma y resta de potencias de igual exponente. Diferencia de cuadrados 113
33. Casos combinados de factoreo 115
34. Teorema de Gauss 119
35. Ecuaciones de grado mayor a dos 121
   Integración 30-31-32-33-34-35 123
36. Expresiones algebraicas fraccionarias 125
37. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias 127
38. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias 131
   Integración final 135
   Para recordar 137
   Autoevaluación 138

Capítulo 7: FUNCIONES

39. Funciones 139
40. Función lineal 141
41. Ecuación de la recta 143
42. Distancia entre puntos y rectas 147
43. Función módulo 151
   Integración 39-40-41-42-43 153
44. Función cuadrática 155
45. Raíces de una función cuadrática. Discriminante 157
46. Gráfico de una función cuadrática 159
47. Distintas expresiones de la función cuadrática 163
   Integración 44-45-46-47 167
48. Estudio de funciones polinómicas 169
49. Análisis de funciones 173
   Integración final 179
   Para recordar 181
   Autoevaluación 182

Capítulo 8: PROPORCIONALIDAD Y TRIGONOMETRÍA

50. Teorema de Thales 183
51. Aplicaciones del teorema de Thales 185
52. Semejanza de triángulos y de otras figuras 189
   Integración 50-51-52 193
53. Trigonometría 195
54. Cálculo de razones trigonométricas 197
55. Resolución de triángulos rectángulos 199
56. Teoremas del seno y del coseno 201
57. Resolución de triángulos oblicuángulos 203
   Integración final 207
   Para recordar 209
   Autoevaluación 210

Capítulo 9: COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

58. Combinatoria 211
59. Binomio de Newton. Triángulo de Pascal 215
60. Probabilidad 217
61. Probabilidad condicional 219
   Integración final 221
   Para recordar 223
   Autoevaluación 224

1 Números reales

1. Números racionales y las expresiones decimales

▶ SABERES DINÁMICOS

Números racionales

Los **números racionales** son aquellos que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros (el divisor debe ser distinto de 0).

• Existen dos maneras de escribir un mismo número racional: como fracción o en forma decimal.

$-\frac{7}{5} = -1{,}4$ $\qquad \frac{2}{11} = 0{,}1818... = 0{,}\widehat{18}$ $\qquad \frac{13}{90} = 0{,}1444... = 0{,}1\widehat{4}$

• La división no exacta de dos números enteros puede dar dos tipos de resultados: una expresión decimal finita o una expresión decimal periódica.

Expresiones decimales finitas.
En ese caso, el cociente es una expresión decimal con un número finito de cifras decimales (porque la división llega en algún momento a resto 0).

$\frac{27}{100} = 27 : 100 = 0{,}27$ $\qquad \frac{15}{20} = 15 : 20 = 0{,}75$ $\qquad \frac{75}{48} = 75 : 48 = 1{,}5625$

Expresiones decimales periódicas.
En este caso, el cociente es una expresión decimal con cifras decimales que se repiten de manera periódica ya que el resto nunca se anula.

Puras: se repiten infinitamente todas las cifras decimales.

$$-\frac{24}{33} = -24 : 33 = -0{,}7272... = -0{,}\widehat{72}$$

Mixtas: se repiten infinitamente solo algunas cifras decimales.

$$\frac{215}{330} = 215 : 330 = 0{,}65151... = 0{,}6\widehat{51}$$

• Para transformar una expresión decimal periódica en fracción, se escribe en el numerador el número decimal (sin la coma) y se resta la parte no periódica; y en el denominador, tantos 9 como cifras decimales periódicas tenga, seguidos de tantos ceros como cifras decimales no periódicas contenga.

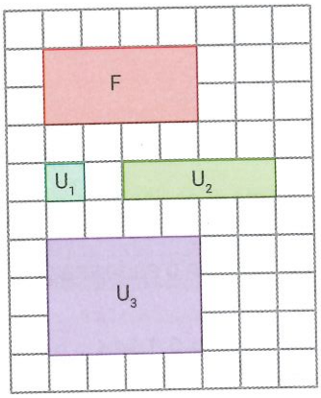
$3{,}1\widehat{2} = \frac{312-31}{90} = \frac{281}{90}$ $\qquad -0{,}1\widehat{25} = -\frac{125-1}{990} = -\frac{124}{990}$ $\qquad 1{,}\widehat{25} = \frac{125-1}{99} = \frac{124}{99}$

1. Números racionales y las expresiones decimales

Medida usando números racionales positivos

Los números racionales positivos permiten expresar **medidas**.
Medir significa indicar cuántas veces un objeto tomado como unidad está contenido en el que se quiere medir.

Midan la figura F utilizando como unidad las figuras U_1, U_2 y U_3.



$F = 8\ U_1$

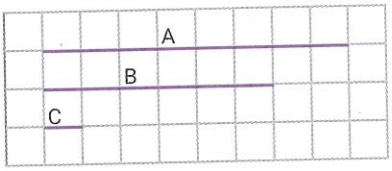
$F = 2\ U_2$

$F = \frac{2}{3}\ U_3$

La medida es un número que depende de la unidad elegida.

Segmentos conmensurables

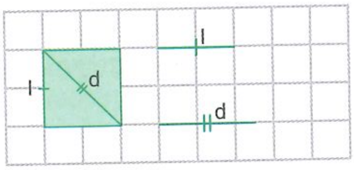
Dos segmentos A y B son **conmensurables** cuando existe otro segmento C que entra una cantidad entera de veces en A y otra cantidad entera de veces en B.



$A = 8\ C$

$B = 6\ C$

A y B son conmensurables.



El lado l del cuadrado y su diagonal d no son conmensurables.

Densidad en el conjunto de los números racionales

El conjunto de los números racionales es un conjunto **denso**, esto significa que entre dos números racionales existen infinitos números racionales comprendidos.

a y b son dos números racionales, $a < b \Rightarrow$ existe un número racional $c = \frac{a+b}{2}$ tal que: $a < c < b$.

Este proceso se puede repetir y encontrar siempre otro número racional ubicado entre a y $\frac{a+b}{2}$.

$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{11}{20} < \frac{3}{5}$

$\frac{1}{2} < \frac{11}{20} \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{21}{40} < \frac{11}{20}$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/rac * y miren el video donde se demuestra que entre dos números racionales siempre hay otro número racional.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=bBKF9dwGdWg

ACTIVIDADES

1. Números racionales y las expresiones decimales

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Todo número entero, ¿se puede expresar en forma periódica?

b. ¿Es cierto que $1,\overset{\frown}{3}$ es equivalente a $\frac{13}{9}$?

c. En la expresión decimal $0,\overset{\frown}{314}$, el número que ocupa la posición decimal 130, ¿es el 4?

2. Escriban la expresión decimal de cada fracción y la fracción irreducible correspondiente a cada expresión decimal, según corresponda.

a. $\frac{3}{8}$ = ______

b. $\frac{5}{3}$ = ______

c. $\frac{12}{7}$ = ______

d. $\frac{33}{121}$ = ______

e. $0,\overset{\frown}{7}$ = ______ $\frac{\square}{\square}$

f. $1,0\overset{\frown}{6}$ = ______ $\frac{\square}{\square}$

g. $2,\overset{\frown}{15}$ = ______ $\frac{\square}{\square}$

h. $1,5\overset{\frown}{3}$ = ______ $\frac{\square}{\square}$

3. Tengan en cuenta el dato y marquen la expresión equivalente al número dado.

a. $3,1\overset{\frown}{5}$, sabiendo que $\frac{5}{9} = 0,\overset{\frown}{5}$.

- $\frac{31}{10} + \frac{5}{9}$ ☐
- $\frac{31}{100} + \frac{5}{9}$ ☐
- $3 + \frac{1}{10} + \frac{5}{9} : 10$ ☐
- $3 + \frac{1}{10} + \frac{5}{9}$ ☐

b. $2,1\overset{\frown}{3}$, sabiendo que $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$.

- $(2 + \frac{1}{10} + 0,\overset{\frown}{3}) : 10$ ☐
- $\frac{21}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}$ ☐
- $(2 + \frac{1}{10} + 0,\overset{\frown}{3}) : 100$ ☐
- $\frac{21}{10} + \frac{1}{3}$ ☐

4. Tengan en cuenta que $\frac{1}{9} = 0,1111...$ y calculen cuál es la fracción correspondiente en cada caso.

a. 1,111... = ______

b. 0,011... = ______

c. 2, 0111... = ______

d. 0,122... = ______

5. Escriban paréntesis para que el resultado sea el dado y verifiquen.

a. $0,1 + 0,\overset{\frown}{1} \;.\; 90 = 19$ ______

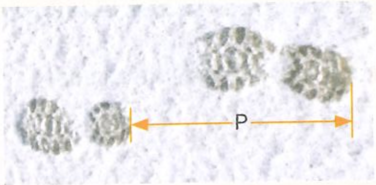
b. $1,\overset{\frown}{9} \;.\; 0,5 - 1 \;+ 3 = 2$ ______

c. $0,\overset{\frown}{2} - 0,\overset{\frown}{1} \;:\; 0,0\overset{\frown}{2} - 0,0\overset{\frown}{1} \;= 10$ ______

6. Reúnanse en grupos, lean atentamente y respondan.

Se considera una actividad moderada caminar alrededor de 100 pasos por minuto.

El largo del paso (P) es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.



Luis sabe que el largo de su paso es de 0,7 m.

María sabe que el largo de su paso es de 0,5 m.

Juan dice que el largo de su paso es de 0,6 m.

a. Calculen la distancia que recorre cada uno en 1 minuto, si su actividad es moderada.

b. Siendo "p" la longitud del paso y "d" la distancia recorrida, hallen una fórmula que permita calcular la distancia recorrida por minuto en una actividad moderada conociendo la longitud del paso.

c. Hallen una fórmula que permita calcular la longitud del paso conociendo la distancia recorrida por minuto en una actividad moderada.

d. Calculen la velocidad de marcha en cada caso.

e. Los tres amigos quieren recorrer una distancia de 1,5 km, manteniendo la longitud del paso constante. ¿Cuántos pasos debe dar cada uno?

7. Observen los siguientes segmentos y respondan.

a. ¿A y B son conmensurables? ______

b. Dibujen en la carpeta distintos segmentos que se puedan tomar como unidad.

c. ¿Es cierto que el segmento A es $\frac{3}{4}$ del B? ______

d. ¿Cómo se relaciona el segmento B respecto del A? ______

2. Números reales

▶ SABERES DINÁMICOS

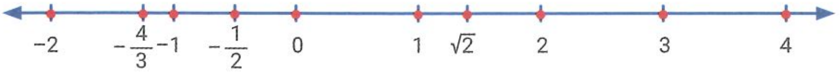
Los números **irracionales** son aquellos que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros, por tener infinitas cifras decimales no periódicas. Todas las raíces no exactas son números irracionales.

$\sqrt{3} = 1{,}73205080756...$ $\sqrt[5]{43} = 2{,}12174746084189...$ $\sqrt{17} = 4{,}12310562562...$

Hay números irracionales que se determinan a partir de una ley de formación.

$1{,}4916253649...$ $0{,}1248163264...$ $\pi = 3{,}1415926...$

El conjunto de los números reales (ℝ) está formado por los números racionales (ℚ) y los irracionales (𝕀). Los números reales se grafican sobre una recta denominada recta real. A cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa (**propiedad de completitud**).



Entre dos números reales distintos siempre hay otro número real (**propiedad de densidad**).

Aproximación

Cuando se trabaja con números que tienen muchas o infinitas cifras decimales, se realizan aproximaciones cometiendo un pequeño error (ε) que es aceptado por razones de orden práctico.

- Para aproximar por **redondeo** se considera la cifra siguiente a la última que se va a dejar; si es mayor o igual que 5, se suma 1 a dicha última cifra y si es menor, se deja igual.

$\sqrt{2} = 1{,}41421356... \approx 1{,}4142136 \ (\varepsilon < 0{,}0000001)$

- Para aproximar por **truncamiento**, se eliminan las cifras que no desean considerarse.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135 \ (\varepsilon < 0{,}0000001)$

TIP

≈ significa es aproximadamente.
∈ significa pertenece.
∧ significa y.
ε significa error.

Áreas dinámicas [Matemática y Biología]
Los termómetros digitales utilizados en la medicina práctica utilizan 3 cifras significativas. Las dos primeras son cifras exactas y la última es una cifra aproximada pero significativa, ya que la temperatura real estará formada por infinitos decimales imposibles de representar y que además no son necesarios para determinar si el paciente tiene fiebre o no.

Intervalos reales

Se denomina **intervalo real** a todo subconjunto de números reales. Cada intervalo se puede representar como semirrectas o segmentos de la recta real.
Los intervalos pueden ser:

- **Intervalos acotados**: cuando sus extremos son números reales.

Abiertos: los extremos no están incluidos en el intervalo. Se utilizan paréntesis para representarlos.	**Cerrados**: los extremos están incluidos en el intervalo. Se utilizan corchetes para representarlos.	**Semiabiertos**: un extremo está incluido en el intervalo (corchete) y el otro no (paréntesis).
$A = \{x \in \mathbb{R} \wedge -1 < x < 2\} = (-1;2)$	$B = \{x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 4\} = [0;4]$	$C = \{x \in \mathbb{R} \wedge -1{,}5 \leq x < 1\} = [-1{,}5;1)$
−1 2	0 4	−1,5 1

- **Intervalos no acotados**: cuando alguno de sus extremos es −∞ o +∞.

$D = \{x \in \mathbb{R} \wedge x < 4\} = (-\infty;4)$

ACTIVIDADES

2. Números reales

Test de comprensión

8. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. La aproximación por redondeo y por truncamiento de $\pi = 3,1416...$ con $\varepsilon < 0,1$, ¿es la misma?

b. El conjunto de los números irracionales, ¿es completo?

c. $E = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 2\}$, ¿representa a un intervalo acotado?

9. Aproximen los números pedidos en cada caso, por truncamiento y por redondeo.

a. 3,17612 $\varepsilon < 0,01$

Truncamiento: ______

Redondeo: ______

b. 1,6182 $\varepsilon < 0,001$

Truncamiento: ______

Redondeo: ______

c. $\sqrt{7}$ $\varepsilon < 0,0001$

Truncamiento: ______

Redondeo: ______

d. $0,\overset{\frown}{7}$ $\varepsilon < 0,1$

Truncamiento: ______

Redondeo: ______

10. Reúnanse en grupo y resuelvan. Pueden ayudarse con la calculadora.

a. Expliquen por qué la calculadora indica que 2 : 3 = 0,66666666667.

b. Hallen un número irracional comprendido en $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$.

c. Encuentren un número irracional que elevado al cuadrado sea racional.

d. Hallen dos números irracionales, tales que su producto sea un número racional.

Para recordar pág. 25

e. Encuentren dos números irracionales, tales que su cociente sea un número entero.

f. Indiquen si es posible hallar dos números irracionales, tales que su suma sea un número racional.

11. Resuelvan.

a. Calculen la medida exacta de la diagonal de un cuadrado de 20 cm de perímetro.

b. Aproximen el valor anterior por redondeo ($\varepsilon < 0,00001$). ______

c. Aproximen el valor anterior por truncamiento ($\varepsilon < 0,001$). ______

12. **Escriban el intervalo real correspondiente en cada caso. Luego, represéntenlo en la recta numérica.**

a. $A = \{x \in \mathbb{R} \wedge -2 < x < 4\}$ ____________

d. $D = \{x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 5\}$ ____________

b. $B = \{x \in \mathbb{R} \wedge x < 5\}$ ____________

e. $E = \{x \in \mathbb{R} \wedge x < 0{,}2 \vee x \geq 0{,}2\}$ ____________

c. $C = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0{,}5\}$ ____________

f. $F = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 1 \vee x \geq 3\}$ ____________

13. **Escriban cada uno de los siguientes intervalos en lenguaje simbólico.**

a. $A = [-2; +\infty)$

A = ____________

d. $D = [-2; 2)$

D = ____________

b. $B = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$

B = ____________

e. $E = (-\infty; +\infty)$

E = ____________

c. $C = [-1{,}5; 2]$

C = ____________

f. $F = (-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

F = ____________

14. **Completen la tabla.**

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Intervalo	Representación gráfica
	$\{x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$		
		$[-3; 4]$	
Todos los números reales mayores o iguales que 2.			
	$\{x \in \mathbb{R} \wedge x < 2 \vee x > 3\}$		

2. Números reales

15. Lean atentamente y escriban en forma de intervalo, según corresponda.

a. Todos los números reales que se encuentran a una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$ respecto del 0.

b. Todos los números reales que se encuentran a una distancia menor que 2 respecto del −1.

c. Todos los números reales que se encuentran a una distancia mayor que 2 respecto del −1.

d. Todos los números reales distintos de 3.

16. Ubiquen los intervalos anteriores en la recta numérica.

a.

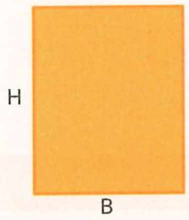
b.

c.

d.

17. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.

a. Completen la tabla teniendo en cuenta que el perímetro del rectángulo es siempre 10 cm. Para recordar pág. 25



B (base en cm)	H (altura en cm)	Área (en cm²)
0,5		
	4	
1,5		
		6,25
3,5		
4		
	0,5	

b. Expresen en forma de intervalo todos los valores que puede tomar la base B.

c. Expresen en forma de intervalo todos los valores que puede tomar la altura H.

d. Expresen en forma de intervalo todos los valores que puede tomar el área del rectángulo.

3. Representación de radicales

▶ SABERES DINÁMICOS

Representación de radicales

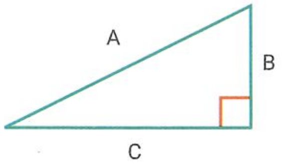
Se denomina **radical** a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que esta tenga solución real.

Representación en la recta numérica

Cada número irracional tiene asociado un punto sobre la recta real.

Para representar un número irracional de la forma $\sqrt{a}$ sobre la recta numérica, se debe recurrir al teorema de Pitágoras: $A^2 = B^2 + C^2$.

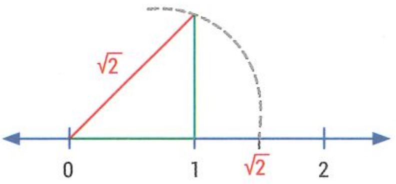
Para recordar pág. 25



- Representación de $\sqrt{2}$.

Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1.

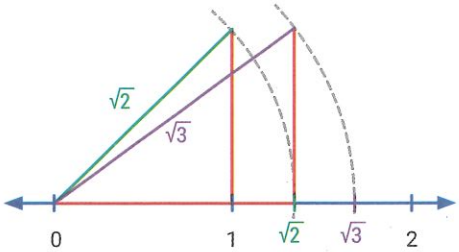
El valor de la hipotenusa es: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



- Representación de $\sqrt{3}$.

Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente.

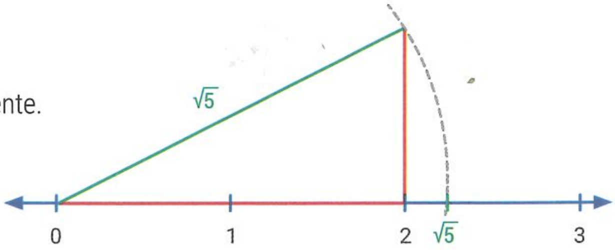
El valor de la hipotenusa es: $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$



- Representación de $\sqrt{5}$.

Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y 2, respectivamente.

El valor de la hipotenusa es: $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



De este modo se puede representar cualquier raíz cuadrada de un número natural, siempre que se elijan convenientemente los catetos del triángulo rectángulo.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/rad * para mirar un video acerca de cómo representar números irracionales utilizando el programa GeoGebra.

*Enlace acortado de https://youtu.be/49GiJWhXZfg

ACTIVIDADES

3. Representación de radicales

Test de comprensión

18. Respondan y expliquen sus respuestas.

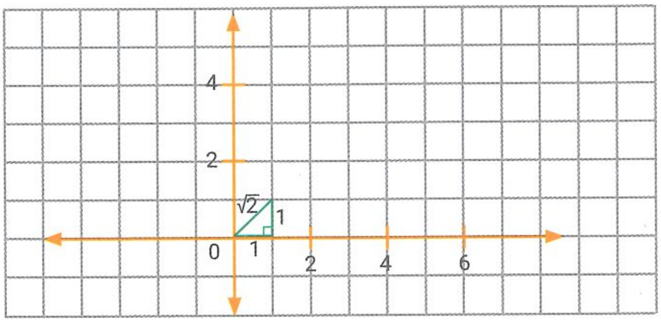
a. La hipotenusa de un triángulo rectángulo, ¿es siempre un número irracional?

b. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $\sqrt{6}$ cm, ¿cuál será la medida de cada cateto?

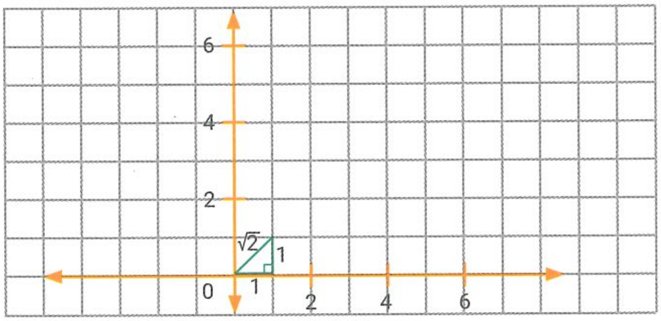
c. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $\sqrt{14}$ cm y uno de sus catetos mide $\sqrt{5}$ cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

19. Representen los siguientes radicales a partir de la $\sqrt{2}$. Completen para que se verifique la igualdad.

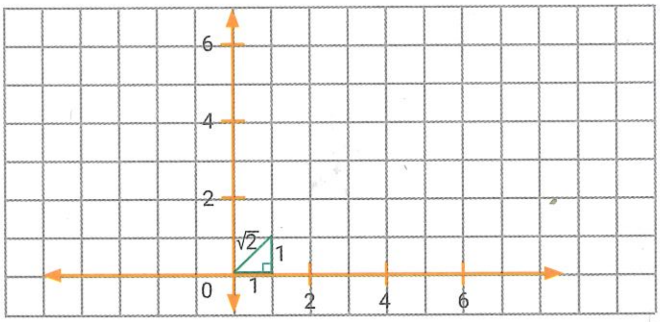
a. $\sqrt{27}$ = ____________________



b. $\sqrt{11}$ = ____________________

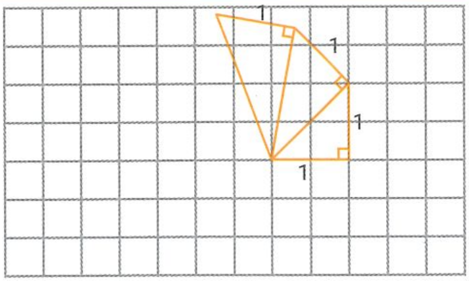


c. $\sqrt{47}$ = ____________________



DinámicaMente

Observen la siguiente sucesión de triángulos rectángulos y resuelvan.



a. Continúen la construcción agregando al menos cuatro triángulos más.

b. Calculen las hipotenusas de los triángulos rectángulos.

____

20. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Todo número real es entero. ☐

b. Todo número entero es real. ☐

c. Todo número racional se puede expresar en forma periódica. ☐

d. $\sqrt{121}$ es un número irracional. ☐

e. Existe algún número entero perteneciente al $[\sqrt{7}; \sqrt{8}]$ ☐

f. No existe ningún número irracional entre $\sqrt{7}$ y $\sqrt{8}$. ☐

21. Tengan en cuenta que $0{,}0555... = \frac{5}{90}$ y resuelvan utilizando esa fracción.

a. 1,0555... =

b. 0,1555... =

c. 0,555... =

22. Resuelvan.

a. ¿Cuántos números racionales hay en el intervalo [0;1]?

b. ¿Cuántos números enteros se encuentran en el intervalo $(-\sqrt{2}; 5]$?

c. Escriban el valor de un número irracional comprendido entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.

d. Escriban el valor de dos números racionales pertenecientes al $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

23. Calculen lo pedido en cada caso con $\varepsilon < 0{,}001$ para cada aproximación.

a. La medida exacta de la diagonal de un cuadrado, sabiendo que su área es de 9 cm^2. Aproximen el resultado por redondeo y por truncamiento.

b. El valor exacto del perímetro de una circunferencia de radio igual 5 cm. Aproximen a los centésimos por truncamiento de π.

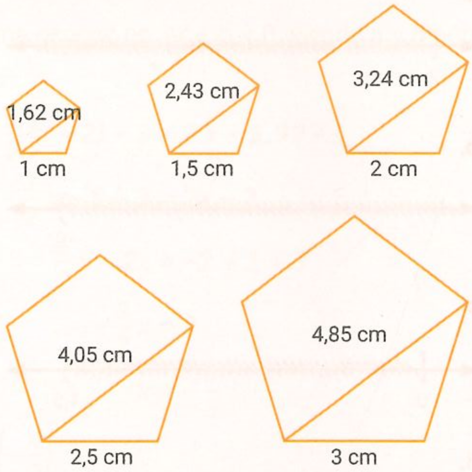
24. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.

El número de oro está asociado a la belleza y a la naturaleza. Se representa con la letra griega "phi" (φ), y su valor es:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989...$$

Se trata de un número irracional que está presente en la naturaleza, el arte, la arquitectura, etc.

a. Observen los siguientes pentágonos regulares y completen la tabla.



Diagonal (cm)	Lado (cm)	Diagonal : lado
1,62	1	

b. Calculen la medida de la diagonal si la medida del lado es 5 cm. Aproximen el valor de φ con $\varepsilon < 0{,}01$.

c. Enuncien una relación que vincule el cociente entre la diagonal del pentágono regular y el lado correspondiente con el número φ.

d. Ingresen en puerto.pub/rad* para conocer más acerca del número de oro.

*Enlace acortado de https://www.educ.ar/recursos/132013/la-matematica-incrustada-en-la-inmensa-variedad-de-formas-de-vida

25. Escriban el intervalo indicado en cada caso. Luego, represéntenlo en una recta numérica.

a. Todos los números mayores que −1.

b. Todos los números menores o iguales que $\frac{7}{2}$.

c. Todos los números mayores que −1 y menores que 5.

d. Todos los números menores que 3 o mayores o iguales que 5.

26. Escriban los intervalos representados en cada recta numérica.

a.

b.

c.

d.

e.

f.

27. Lean atentamente y respondan.

Una sustancia que inicialmente se encuentra a una temperatura de 10 °C se pone a calentar hasta alcanzar el punto de ebullición (100 °C). La temperatura aumenta a razón de 5 °C por minuto.

Expresen en forma de intervalo la variación de la temperatura (T) y la variación del tiempo (t).

28. Marquen con una X la respuesta correcta en cada caso.

a. ¿Cuál es la altura exacta de un rectángulo de 3 cm de base y 7 cm de diagonal?

$\sqrt{40}$ cm ☐ 6,234 cm ☐ $\sqrt{58}$ cm ☐

b. ¿Cuál es el valor aproximado por redondeo a los centésimos de la diagonal de un cuadrado de 6 cm de lado?

8,48 cm ☐ 8,49 cm ☐ 8,485 cm ☐

c. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{3}$ cm?

$\frac{3}{2}$ cm ☐ $\frac{9}{4}$ cm ☐ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm ☐

29. Calculen lo pedido en cada caso. Luego, representen cada resultado en una recta numérica.

a. La hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 3 cm, respectivamente.

Hipotenusa = ☐

b. La altura de un triángulo rectángulo cuya base mide 3 cm y la hipotenusa, 7 cm.

Altura = ☐

c. Los valores de x tales que $x^2 = 5$.

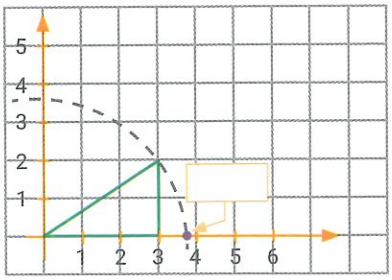
x_1 = ☐ x_2 = ☐

30. Utilicen como referencia $\sqrt{2}$ y representen cada número en una recta numérica.

a. $\sqrt{51}$

b. $-\sqrt{38}$

31. Indiquen qué número irracional está representado en la recta numérica.



4. Ecuaciones e inecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Ecuaciones

Una **identidad** es una igualdad que se verifica para cualquier valor de la/s variable/s.

$3 \,.\, (x + 2) = 3 \,.\, x + 6$ $\qquad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad (x - y) \,.\, (x + y) = x^2 - y^2$

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para uno, algunos o ningún valor de la/s variable/s.

$2 \,.\, (x - 3) = x + 1$ $\qquad x^2 - \frac{1}{4} = 0$ $\qquad 2x + 8 = 2 \,.\, (x - 3)$

Resolver una ecuación es encontrar, si existen, el o los valores de las variables que verifican la igualdad planteada. Dichos valores determinan el conjunto solución de la ecuación.

Una ecuación de primer grado o lineal es aquella cuya forma general es: ax + b = 0, siendo a y b números reales, con a ≠ 0.

$$3 \,.\, (x - 8) - 2 = x + 1$$
$$3x - 24 - 2 = x + 1$$
$$3x - x = 1 + 24 + 2$$
$$2x = 27$$
$$x = \frac{27}{2}$$
$$S = \left\{\frac{27}{2}\right\}$$

$$\frac{1}{2}(x - 2) - 3 = 2\,x - 1{,}999...$$
$$\frac{1}{2}x - 1 - 3 = 2x - 2$$
$$\frac{1}{2}x - 2x = -2 + 1 + 3$$
$$-\frac{3}{2}x = 2$$
$$x = -\frac{4}{3}$$
$$S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

Inecuaciones

Las desigualdades que contienen variables se llaman **inecuaciones**.
Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que la verifican, y el conjunto solución es un intervalo real o el conjunto vacío.

Una inecuación se resuelve como una ecuación, salvo en el caso en que se divida o se multiplique a ambos miembros por un número negativo, lo que invierte el sentido de la desigualdad.

$$3x - 1 > 2x + 3$$
$$3x - 2x > 3 + 1$$
$$x > 4$$
$$S = (4; +\infty)$$

$$-2 \,.\, (x - 5) \leq x - 6$$
$$-2x + 10 \leq x - 6$$
$$-2x - x \leq -6 - 10$$
$$-3\,x \leq -16$$
$$-3 : (-3)\,x \geq -16 : (-3)$$
$$x \geq \frac{16}{3} \qquad S = \left[\frac{16}{3}; +\infty\right)$$

ACTIVIDADES

4. Ecuaciones e inecuaciones

Test de comprensión

32. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que ningún número real verifica que: $2.x - 3 = 2.(x - 1)$?

b. ¿Es cierto que la ecuación $3x - 2 = 3.(x - 1) + 1$ tiene como solución única a $x = 0$?

c. ¿Es cierto que $-\sqrt{7}$ es una solución de $-(x - 2x) + 3 > 0$?

33. Indiquen en cada ecuación, sin resolverla, si el número indicado es solución.

a. $x - 1 = 2.(x - 3)$ $x = 2$ ☐

b. $x.\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ $x = \frac{1}{2}$ ☐

c. $2.(x - 1) - (x - 3) = 4x - 5$ $x = \frac{1}{3}$ ☐

34. Unan con flechas las ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución (equivalentes).

a. $2.(x - 5) = x + 3$ $3 - (x - 9) + 1 = 5$

b. $2x - (x + 3) + 2 = x + 1,\overset{\frown}{9} - 3$ $x - 9 = 4$

c. $2x - 9 = x - 1$ $3.(x + 3) = 3x + 9$

35. Marquen con una X la opción correcta.

Ecuación	Cantidad finita de soluciones	No tiene solución	Infinitas soluciones
$x + y = 0$			
$2.(x - 3) + 1 = x + 3$			
$3x - 1 = 3.(x + 2)$			
$(x + 2).(x - 1) = 0$			
$2.(x - 8) = 2x - 16$			
$x^2 + 1 = -3$			

36. Reúnanse en grupos y resuelvan las siguientes inecuaciones.

a. $\frac{-x + 1}{2} \geq 3$

b. $\frac{x}{4} - \frac{x + 1}{3} \leq 2$

c. $x.(x + 1) > 0$

5. Módulo de un número real

▶ SABERES DINÁMICOS

El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero sobre la recta real. Para todo número real x, su módulo se expresa: **|x|**.

$\forall\, x \in \mathbb{R}: |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

TIP

$\forall$ significa para todo.

$\vee$ significa o.

U significa unión.

Propiedades del módulo

- $|x| \geq 0$

  $|3{,}5| = 3{,}5$ *$|-2| = 2$* *$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$*

- $|x| = |-x|$

  $|-5| = |-(-5)| = 5$ *$|3{,}2| = |-3{,}2| = 3{,}2$*

- $|x + y| \leq |x| + |y|$

  $|-2 + 5| \leq |-2| + |5|$
  $|3| \leq 2 + 5$
  $3 \leq 7$

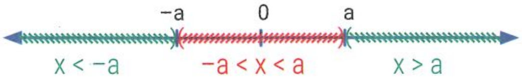
  $|1 + 6| \leq |1| + |6|$
  $|7| \leq 1 + 6$
  $7 \leq 7$

- $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$

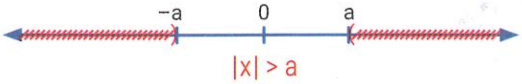
  $|-3 \,.\, 4| = |-3| \,.\, |4|$
  $|-12| = 3 \,.\, 4$
  $12 = 12$

  $|2 \,.\, 5| = |2| \,.\, |5|$
  $|10| = 2 \,.\, 5$
  $10 = 10$

Para entender mejor las propiedades que siguen, se representan los siguientes intervalos reales.



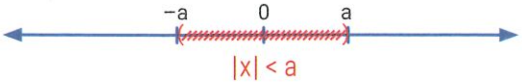
- $|x| > a \wedge a > 0 \Rightarrow x > a \vee x < -a \Rightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$



$|x| > 1 \wedge 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \vee x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$|x| \geq 2{,}5 \wedge 2{,}5 > 0 \Rightarrow x \geq 2{,}5 \vee x \leq -2{,}5 \Rightarrow x \in (-\infty; -2{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$

- $|x| < a \wedge a > 0 \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a; a)$



$|x| < 3 \wedge 3 > 0 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow x \in (-3; 3)$

$|x| < 0{,}5 \wedge 0{,}5 > 0 \Rightarrow -0{,}5 < x < 0{,}5 \Rightarrow x \in (-0{,}5; 0{,}5)$

ACTIVIDADES

5. Módulo de un número real

Test de comprensión

37. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Existe algún valor de x tal que $|x| = -2$?

b. La ecuación $|5 \cdot x| = 10$, ¿admite más de una solución?

c. ¿Es cierto que si $a < b$, entonces siempre $|a| < |b|$?

38. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. $|-1 - 8| =$ ____

b. $|3| \cdot |-8 + 2| =$ ____

c. $|-1 - 5 + 10 - 3| =$ ____

d. $|5 - 10| =$ ____

e. $-|-5 + 1| =$ ____

f. $|2 \cdot (-3 + 5)| =$ ____

g. $|2 \cdot (-3) + 7| =$ ____

h. $|-5 + 2| - 2 \cdot |2 - 10| =$ ____

i. $|3 \cdot (-4) + 2| =$ ____

j. $|-1 - 1| \cdot |-3 + 2| - 1,\widehat{9} =$ ____

39. Escriban el conjunto solución y representen en la recta numérica.

a. $|x| = 10$ S = ____

b. $|x| \leq 10$ S = ____

c. $|x + 1| < 5$ S = ____

d. $|x - 3| > 2$ S = ____

e. $|x + 2| < |x| + |2|$ S = ____

f. $-2 \cdot |x| < 10$ S = ____

40. Expresen en forma de módulo los siguientes intervalos.

a. $[-3; 3]$ ____

b. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ ____

c. $(-3; 7)$ ____

d. $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ ____

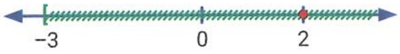
6. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **resolver ecuaciones lineales** en las que la incógnita está dentro de un **módulo**, se deben tener en cuenta tanto la definición de módulo como sus propiedades.

$|x + 3| = 5$

$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$	v	$x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$	Condición necesaria.
$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$	v	$-x - 3 = 5 \Rightarrow x = -8$	Se elimina el módulo aplicando definición.
$x \geq -3 \wedge x = 2$	v	$x < -3 \wedge x = -8$	



Solución = {−8; 2}

$|-2x + 1 + 0{,}5\,x| + 1 = 2$

$-1{,}5x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$	v	$-1{,}5x + 1 < 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$	Condición necesaria.
$-1{,}5x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$	v	$1{,}5\,x - 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$	Se elimina el módulo aplicando definición.
$x \leq \frac{2}{3} \wedge x = 0$	v	$x > \frac{2}{3} \wedge x = \frac{4}{3}$	

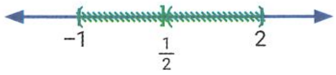
Solución = $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$

Inecuaciones con módulo

$|4x - 2| < 6$

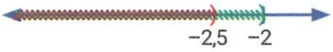
$4x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$	v	$4x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$	Condición necesaria.
$4x - 2 < 6 \Rightarrow x < 2$	v	$-4x + 2 < 6 \Rightarrow x > -1$	Se elimina el módulo aplicando definición.
$x \geq \frac{1}{2} \wedge x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$	v	$x < \frac{1}{2} \wedge x > -1 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$	

La solución es la unión de los intervalos: $S = \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) = (-1; 2)$

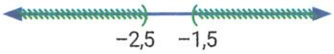


$|x + 2| > 0{,}5$

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$	v	$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$	Condición necesaria.
$x + 2 > 0{,}5 \Rightarrow x > -1{,}5$	v	$-x - 2 > 0{,}5 \Rightarrow x < -2{,}5$	Se elimina el módulo aplicando definición.
$x \geq -2 \wedge x > -1{,}5 \Rightarrow x > -1{,}5$	v	$x < -2 \wedge x < -2{,}5 \Rightarrow x < -2{,}5$	



La solución es la unión de los intervalos: $S = (-\infty; -2{,}5) \cup (-1{,}5; +\infty)$



ACTIVIDADES

6. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

Test de comprensión

41. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que $|x - 1| = 2$ representa los números que se encuentran a dos lugares de distancia respecto del 1?

b. La solución de $|-2x + 3| \geq 0$, ¿es $(-\infty; +\infty)$?

c. El intervalo $(-4; 1)$, ¿es la solución de $|x + 1{,}5| \leq 2{,}5$?

42. Resuelvan las siguientes ecuaciones con módulo.

a. $|-2x + 3| = 5$

b. $|3x - 1| + 2 = 4$

c. $1 - |x + 5| + |-3| = |1 - 7|$

d. $\frac{1}{2} \cdot |x - \sqrt{4}| = 5$

43. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. El módulo del producto entre el doble de un número y la mitad de −8, es igual a 8.

b. El doble del módulo de la suma de un número y 1 es igual a 10.

44. Resuelvan las siguientes inecuaciones con módulo y escriban el conjunto solución.

a. $-3 \cdot |x - 5| > -6$

b. $|-4x + 2| > 10$

c. $4 \cdot |x - 1| \leq 8$

d. $|3x - 4| \leq 5$

45. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $-0{,}2x + 3 = 0{,}2x + 2$

b. $\frac{x-3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

c. $6 - (-x + 1) = 5 + x$

d. $\frac{1}{3} \cdot (3x - 2) - \frac{1}{6} = 0{,}\widehat{1}x + \frac{1}{2}$

e. $-2 \cdot (x - 4) = x + 13 - 3x$

f. $\frac{x+1}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$

46. Tengan en cuenta que x + 2 y = 1, reúnanse en grupos y respondan.

a. $x = 2$ e $y = -1$, ¿es una solución?

b. Encuentren al menos tres soluciones.

c. ¿Para qué valor de y, x vale -1?

d. ¿Para qué valor de x, y vale -3?

47. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. El triple de la suma entre la mitad de un número y el inverso de −3 es igual al cuadrado de $\sqrt{2}$.

b. La suma entre el módulo de −7 y el doble de un número es igual a dicho número disminuido en una unidad.

c. La suma entre un número, su quinta parte y −1 es igual al doble de dicho número aumentado en 3.

48. Resuelvan y obtengan el conjunto solución.

a. $-3 \cdot (x + 5) - 2x > 4x - 1$

b. $-\frac{1}{2} \cdot (x + 4) \leq x - 3$

c. $\frac{x-5}{3} \geq \frac{-x+2}{4}$

49. Escriban las expresiones usando módulo y resuelvan.

a. Todos los números reales que se encuentran a una distancia igual a 2, respecto del −1.

b. Todos los números reales que se encuentran a una distancia menor que 5, respecto del 0,5.

c. Todos los números reales que se encuentran a una distancia mayor o igual que 1, respecto del −4.

d. Todos los números reales que se encuentran a una distancia igual a $\sqrt{2}$, respecto del 0.

50. Representen las soluciones de la actividad anterior en la recta numérica correspondiente.

a.

b.

c.

d.

51. Expresen las siguientes desigualdades usando módulo.

a. $-4 < x < 4$

b. $2 \leq x \leq 7$

c. $x < -6 \vee x > 4$

52. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. En la ecuación $|x - 7| = 9$, el valor de $x = -2$ es la única solución.

b. El conjunto solución de $|x| > -1$ es el conjunto de los números reales.

c. La solución de $|2x - 1| = 5$ es $\{-2;4\}$.

d. $|x| + 1 = 0$ no tiene solución.

53. Marquen con una X la opción correcta.

a. El módulo de la diferencia entre el triple de un número y 5 es igual a la suma entre el módulo de 1 y el módulo de −2.

- $3 \cdot |x - 5| = |1 - 2|$
- $|3x - 5| = |1| + |-2|$
- $3 \cdot |x - 5| = |1| + |-2|$

b. La suma entre el módulo de un número y 4 es menor que la suma entre el doble de ese número y el opuesto del módulo de 3.

- $|x| + 4 < 2x + (-|3|)$
- $|x| + 4 < 2x + |x - 3|$
- $|x + 4| < 2x - |3|$

54. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a. En la inecuación $|x - 1| > 3$, el valor de $x = -2$ es una solución. ☐

b. $-|x| + 2 < 1$ no admite solución. ☐

c. La solución de $|2x + 1| < 5$ es $[-3; 2]$. ☐

55. **Calculen todos los números que verifican las siguientes igualdades.**

a. $|1 - 3x| + 2 = 4$

b. $4 \, . \, |-x + 3| = 6$

c. $0{,}5 \, . \, |-2x + 1| - 3 = 0$

d. $|x - 5| - |4 - 6| = -2 \, . \, |-(1 - 0{,}5)|$

56. **Escriban el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.**

a. $|2x - 5| < 4$

b. $2 \, . \, |x + 3| + 1 < 6$

c. $-|x + 1| + 8 \geq -10$

d. $2 > |-3x + 5| - 8$

e. $|4x - 2| < |-3|$

f. $2 \, . \, (-3) - 7 < |3x - 7| - 15$

g. $|1 - 2x - 4| + 8 \leq x + 1$

57. **Escriban el conjunto solución de la siguiente inecuación; tengan en cuenta la condición necesaria para el cociente de la división.**

a. $\dfrac{3}{|x + 1|} > 1$

b. Representen el intervalo solución en la recta numérica.

58. **Reúnanse en grupos, lean atentamente y respondan.**

Como consecuencia del calentamiento global del planeta, el hielo de algunos glaciares se está derritiendo. Algunos años después de que el hielo haya desaparecido, empiezan a crecer en las rocas unas plantas diminutas llamadas líquenes. Los líquenes crecen casi en forma de círculo. La relación entre el diámetro de este círculo y la edad del liquen se puede expresar aproximadamente mediante la fórmula:

$d = 7 \, . \, \sqrt{t - 12}$, (siendo "d" el diámetro del liquen en milímetros, y "t" el número de años transcurridos desde que el hielo ha desaparecido).

a. ¿Cuántos años deben transcurrir luego de que haya desaparecido el hielo para que aparezcan los líquenes?

b. Tengan en cuenta la fórmula e indiquen en forma de inecuación los valores posibles de t.

c. Utilicen la fórmula para calcular el diámetro que tendrá un liquen 16 años después de que el hielo haya desaparecido.

d. ¿Es cierto que a los tres años de su aparición el liquen tiene un diámetro aproximado de 12,1 mm?

e. Indiquen en forma de intervalo los valores del diámetro del liquen en los primeros 5 años de su aparición.

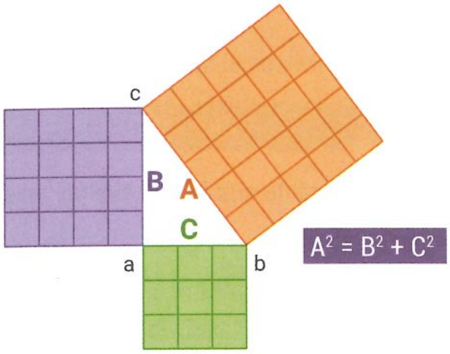
f. Si el diámetro de un liquen es de 35 milímetros, ¿cuántos años han transcurrido desde que el hielo desapareció de este lugar?

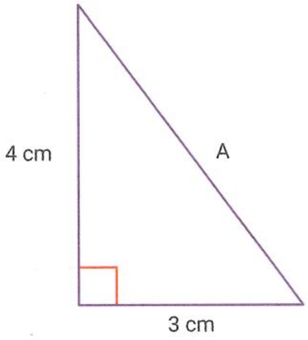
g. Investiguen qué consecuencias trae para nuestro planeta el derretimiento del hielo de los glaciares y escriban un breve resumen.

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Propiedad pitagórica

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.





$A^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$
$A^2 = 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$
$A^2 = 25\text{ cm}^2$
$A = \sqrt{25\text{ cm}^2}$
$A = 5\text{ cm}$

Propiedad de la radicación

La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y de la división.

$\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$ (si n es par, $a \geq 0 \wedge b \geq 0$) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \wedge b \neq 0$ (si n es par, $a \geq 0 \wedge b > 0$)

Condición necesaria para...

- la división de números reales: el divisor debe ser distinto de cero.

  $a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{b} = c;\ c \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$

  $\mathbb{N}$
- la radicación de índice par: el radicando (a) debe ser mayor o igual que 0.

  $\sqrt[n]{a} \wedge n = 2z$, siendo z un número natural $\Rightarrow a \geq 0$.

Fórmulas para cálculo de perímetro y área de algunas figuras

Figura	Perímetro	Área
Rectángulo	$2b + 2h$	$b\,.\,h$
Cuadrado	$4\,L$	L^2
Triángulo	$L_1 + L_2 + L_3$	$\frac{b\,.\,h}{2}$
Rombo	$4\,L$	$\frac{D\,.\,d}{2}$
Círculo	$\pi\,.\,d$	$\pi\,.\,r^2$

1 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

59. Lean atentamente y respondan.

La estación espacial Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 km. El radio de la Tierra mide aproximadamente 6 378 km.

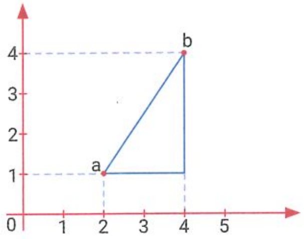
a. ¿Cuál era aproximadamente la longitud de una órbita de la estación espacial Mir?

◯ 42 500 km ◯ 44 500 km ◯ 52 500 km

b. ¿Cuál fue la distancia total recorrida por la estación espacial Mir durante sus 86 500 vueltas mientras estuvo en órbita (redondeando el resultado a las decenas de millón).

◯ 3 600 000 000 km ◯ 3 650 000 000 km ◯ 3 680 000 000 km

60. ¿Cuál es la distancia exacta entre los puntos a y b? Ubiquen en una recta numérica esa distancia.



◯ **a.** 3,605 ◯ **c.** $\sqrt{13}$

◯ **b.** $\sqrt{5}$ ◯ **d.** 5

61. Sabiendo que $0,5 < x \leq 0,7$ y que $0,5 < y < 1$, ¿cuál es el intervalo que corresponde en cada caso?

a. x	◯ $(0,5 ; 0,7]$	◯ $(0,5 ; 0,7)$	◯ $[0,5 ; 0,7)$
b. y	◯ $[0,5; 1)$	◯ $(0,5; 1)$	◯ $[0,5; 1]$
c. $2x$	◯ $(0,25; 0,35]$	◯ $[1; 1,4)$	◯ $(1; 1,4]$
d. $-x$	◯ $(-0,7; -0,5]$	◯ $[-0,7; -0,5)$	◯ $(0,5; 0,7]$
e. $\frac{1}{y}$	◯ $(0,5; 1)$	◯ $(0,5; 2)$	◯ $(1; 2)$
f. $-2y$	◯ $(-2; -1)$	◯ $(-0,25; -0,5)$	◯ $(-1; 2)$

62. ¿Cuál es el conjunto solución en cada caso?

a. $\frac{4-x}{2} - 0,5 = -1,5$	◯ $S = \{6\}$	◯ $S = \{18\}$	◯ $S = \{0\}$
b. $\frac{-2x+1}{3} \geq \frac{1}{2}$	◯ $S = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$	◯ $S = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$	◯ $S = (-\infty; 4]$
c. $\lvert x-3\rvert + 5 = \lvert -2 . 4\rvert + 9$	◯ $S = \{-9; 15\}$	◯ $S = \{-1; 7\}$	◯ $S = \{8; 15\}$
d. $\lvert 2x+1\rvert - 3 < 5$	◯ $S = \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$	◯ $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$	◯ $S = \left(-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$

2 Operaciones con números reales

7. Propiedades de la potenciación y radicación

▶ SABERES DINÁMICOS

Potenciación

La **potenciación** tiene los siguientes **elementos**:

$$a^n = b$$

Base → a; Exponente → n; Potencia → b

Propiedades de la potenciación

Propiedad	Simbólicamente	Ejemplo
Potencia de exponente cero	$a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$	$3^0 = 1$ $\quad 0^0 = \nexists$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a \neq 0$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$(-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^7$
Cociente de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \Leftrightarrow a \neq 0$	$\frac{4^5}{4^3} = 4^2$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n.m}$	$(2^3)^4 = 2^{12}$
Distributividad respecto de la multiplicación	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$
Distributividad respecto de la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \Leftrightarrow b \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

TIP

$\Leftrightarrow$ significa si y solo si.

Radicación

La **radicación** tiene los siguientes **elementos**:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Índice → n; radicando → a; raíz → b

La **radicación** se puede expresar **como una potencia de exponente fraccionario**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[5]{2^{-3}} = (2)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$$

Propiedades de la radicación

Propiedad	Simbólicamente	Ejemplos
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n.m}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[12]{2}$
Distributividad respecto de la multiplicación	$\sqrt[n]{a.b} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{2.5} = (2 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5}$
Distributividad respecto de la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \Leftrightarrow b \neq 0$	$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{2^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$
Simplificación de índices	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[m:r]{a^{m:r}} \Leftrightarrow r \neq 0 \wedge a > 0$	$\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6:3]{5^{3:3}} = \sqrt{5}$
Eliminación del radical	Si *n* es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ Si *n* es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[5]{7^5} = 7$ $\sqrt[6]{(-3)^6} = \lvert -3 \rvert = 3$
Amplificación de índices	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m.r}{n.r}} = \sqrt[m.r]{a^{m.r}} \Leftrightarrow p \neq 0 \wedge a > 0$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3.2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

ACTIVIDADES

7. Propiedades de la potenciación y radicación

Test de Comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que $(-2)^{-3} = 2^3$? ¿Y que $4^{-2} = 4^{\frac{1}{2}}$?
   b. ¿Es cierto que $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$?
   c. Confeccionen una tabla en la cual figuren las propiedades de simplificación, eliminación y amplificación de índices, las condiciones para que sean válidas y diferentes ejemplos de cada una.

2. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Corrijan los casos incorrectos.

a. $2^{-3} \,.\, 2^2 = 2^{-6}$ ☐

b. $(-5)^2 : (-5)^{-4} = (-5)^6$ ☐

c. $(3^4)^{-2} \,.\, \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 3^{-11}$ ☐

d. $7^{-2} : \left(\frac{1}{7}\right)^3 \,.\, (7^2)^{-2} = 7^{-3}$ ☐

e. $3^{-4} = -81$ ☐

f. $\sqrt{(-10)^2} = -10$ ☐

g. $\sqrt[5]{\sqrt{16}} = 4^{\frac{1}{5}}$ ☐

h. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = -\frac{125}{8}$ ☐

3. Unan con flechas cada operación con su expresión equivalente.

a. $(am)^{-2} \,.\, m^4 : (am) =$

b. $\sqrt{a^2m} \,.\, \sqrt{a^5m^2} : \sqrt{a^3m^2} =$

c. $a^{-3}m^2 \,.\, (am)^4 : (a^2m)^5 =$

d. $\sqrt{a^3m} : \sqrt{a^{-2}m^3} =$

- $a^{-3}m$
- $\sqrt{a^5m^{-2}}$
- $a^{-9}m$
- $\sqrt{a^4m}$

4. Expresen en la forma más simple posible aplicando propiedades.

a. $(5^2 \,.\, 5^{-4} : 5^{-3})^2 =$ ______

b. $[(-3)^2]^{-2} : (-3)^{-5} =$ ______

c. $(-2)^8 : [(-2)^3]^2 \,.\, (-2)^4 =$ ______

d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \,.\, 2^4 : 0{,}5^{-4} =$ ______

e. $(2a^2)^{-3} : (4a^{-2})^2 =$ ______

f. $(3a^{-1})^2 \,.\, (9a^3)^{-1} =$ ______

g. $(a^2m)^{-4} : (a^3m^{-1})^{-2} =$ ______

h. $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt{2} =$ ______

i. $(am)^4 \,.\sqrt{am} =$ ______

j. $\sqrt[3]{16} : \sqrt{8} \,.\, 2^{-1} =$ ______

5. Resuelvan en la carpeta aplicando propiedades.

a. $\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{3}}{\sqrt[4]{125.9}}$

b. $\dfrac{\sqrt[3]{9.36}}{\sqrt{3}\,.\sqrt[3]{6^2}}$

c. $\dfrac{\sqrt[8]{4^3.7^4}}{\sqrt{49}.\sqrt[4]{32}}$

d. $\dfrac{\sqrt[10]{16}\,.\sqrt[5]{8}}{\sqrt[20]{128}}$

6. Indiquen si el siguiente cálculo está bien resuelto; en caso contrario, corrijan el error.

$$\frac{\sqrt[6]{2^4.3^5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[12]{\frac{2^{12}.3^{15}}{2^6.3^6}} = \sqrt[12]{2^6.3^9}$$

______

______

______

8. Radicales. Adición y sustracción

▶ SABERES DINÁMICOS

Extracción de factores de un radical

Para poder **extraer factores de un radical** se lo debe descomponer en factores. Siempre que el exponente del radicando sea mayor o igual que el índice de la raíz, se podrá extraer dicho factor aplicando las propiedades de la potenciación; en caso contrario el factor quedará dentro del radical.

$$\sqrt{27b^3c^6} = \sqrt{3^3b^3c^6} = \sqrt{3^2} \,.\, \sqrt{3} \,.\, \sqrt{b^2} \,.\, \sqrt{b} \,.\, \sqrt{c^2} \,.\, \sqrt{c^2} \,.\, \sqrt{c^2} = 3 \,.\, \sqrt{3} \,.\, b \,.\, \sqrt{b} \,.\, c \,.\, c \,.\, c = 3bc^3\sqrt{3b}$$

$$\sqrt[7]{128x^{14}y^8z^2} = \sqrt[7]{2^7x^{14}y^8z^2} = \sqrt[7]{2^7} \,.\, \sqrt[7]{x^7} \,.\, \sqrt[7]{x^7} \,.\, \sqrt[7]{y^7} \,.\, \sqrt[7]{y} \,.\, \sqrt[7]{z^2} = 2 \,.\, x \,.\, x \,.\, y \,.\, \sqrt[7]{yz^2} = 2x^2\, y\, \sqrt[7]{yz^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{216y^9z^5}{125a^4}} = \frac{\sqrt[3]{2^3.3^3y^9z^5}}{\sqrt[3]{5^3a^4}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3^3}.\sqrt[3]{y^3}.\sqrt[3]{y^3}.\sqrt[3]{y^3}.\sqrt[3]{z^3}.\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{a}} = \frac{2.3.y.y.y.z.\sqrt[3]{z^2}}{5.a.\sqrt[3]{a}} = \frac{6y^3z}{5a}\sqrt[3]{\frac{z^2}{a}}$$

Radicales semejantes

Dos términos **radicales** son **semejantes** cuando tienen el mismo radicando y el mismo índice.

$3\sqrt[3]{7}$ y $-\sqrt[3]{7}$
$-4\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$
$\sqrt[5]{2^3}$ y $-\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^3}$
] Términos con **radicales semejantes**

$\sqrt{6}$ y $\sqrt[3]{6}$
$\sqrt[5]{10}$ y $\sqrt[10]{5}$
$\sqrt[6]{7}$ y $\sqrt[3]{7}$
] Términos con **radicales no semejantes**

Adición y sustracción de radicales

Para **sumar o restar radicales** es necesario que sean semejantes; cuando esto sucede se suman o se restan los coeficientes de la expresión y se deja el radical semejante como factor común.

$$2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} = \left(2 - \frac{1}{2} + 1\right) . \sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$3\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[5]{4} - \sqrt[3]{5} - 6\sqrt[5]{4} + 3\sqrt[5]{4} + 2\sqrt[3]{5} = (3 - 1 + 2) . \sqrt[3]{5} + (4 - 6 + 3) . \sqrt[5]{4} = 4\sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{4}$$

En algunas situaciones, para poder identificar los radicales semejantes hay que llevarlos a su mínima expresión.

$$\begin{aligned} 4\sqrt{45} - 3\sqrt{125} - 2\sqrt{20} &= 4\sqrt{3^2 . 5} - 3\sqrt{5^3} - 2\sqrt{2^2 . 5} = \\ &= 4 . 3\sqrt{5} - 3 . 5\sqrt{5} - 2 . 2\sqrt{5} = \\ &= 12\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \\ &= (12 - 15 - 4) . \sqrt{5} = -7\sqrt{5} \end{aligned}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/efr * y en puerto.pub/srr ** para mirar un video acerca de cómo extraer factores de un radical y cómo sumar y restar radicales, respectivamente.
Enlaces acortados de *https://youtu.be/R1T4i3Z47ZE y **https://youtu.be/fJBbxxVFODk

$$\begin{aligned} \sqrt{567} - \sqrt{675} - 2\sqrt{175} + 3\sqrt{147} &= \sqrt{3^4 . 7} - \sqrt{3^3 . 5^2} - 2\sqrt{5^2 . 7} + 3\sqrt{7^2 . 3} = \\ &= 9\sqrt{7} - 15\sqrt{3} - 10\sqrt{7} + 21\sqrt{3} = \\ &= (9 - 10) . \sqrt{7} + (-15 + 21) . \sqrt{3} = -\sqrt{7} + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

8. Radicales. Adición y sustracción

Test de comprensión

7. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que $\sqrt{5}$ y $\sqrt{20}$ son radicales semejantes? ¿Por qué?

b. ¿Son $\sqrt[5]{3}$ y $\sqrt[5]{3^2}$ radicales semejantes? ¿Por qué?

c. Realicen una tabla con ejemplos de los casos en los cuales es posible sumar o restar radicales.

8. Rodeen con color las respuestas correctas.

a. $\sqrt[3]{27x^4y^2}$ • $3x\sqrt[3]{3xy^2}$ • $3x\sqrt[3]{xy^2}$ • $3x\sqrt[3]{y^2}$

b. $\sqrt[5]{\frac{a^{12}b^{10}}{c^{14}}}$ • $\frac{ab}{c}\sqrt[5]{\frac{a^2}{c^2}}$ • $\sqrt[5]{\frac{a^2b}{c^4}}$ • $\frac{a^2b}{c^2}\sqrt[5]{\frac{a^2}{c^4}}$

c. $\sqrt{\frac{0,25a^3b^4}{8}}$ • $\frac{0,5}{4}ab\sqrt{a}$ • $0,25ab^2\sqrt{\frac{a}{2}}$ • $\frac{ab^2}{8}\sqrt{\frac{a}{2}}$

9. Completen la tabla con la mínima expresión.

Radical	$\sqrt{405}$	$\sqrt[3]{243x^5}$	$\sqrt{0,0004m^3}$	$\sqrt{\frac{80x^7}{125}}$	$\sqrt[5]{\frac{96x^6y^7}{243z^{10}}}$	$\sqrt[4]{\frac{2401a^7}{32b^5}}$
Mínima expresión						

10. Resuelvan las siguientes sumas y restas.

a. $3\sqrt[3]{5} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} =$ ____________

b. $-5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{12} =$ ____________

c. $7\sqrt{b} + \sqrt{b} - 4\sqrt{b} - 2\sqrt{b} =$ ____________

d. $\sqrt{12x} + \sqrt{27x} - \sqrt{48x} =$ ____________

e. $3\sqrt{50x^3} + \sqrt{18x^3} - 2\sqrt{8x^3} =$ ____________

11. Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.

a. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$ ____________

b. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$ ____________

c. $\sqrt{48} + \sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} =$ ____________

d. $-2\sqrt{128} - 2\sqrt{3^{-1}} + 4\sqrt{98} + \sqrt{\frac{1}{27}} =$ ____________

e. $7\sqrt[3]{54x^6} + 2\sqrt[3]{16x^6} - \sqrt[3]{128x^6} =$ ____________

f. $5\sqrt[6]{64a^2} - 4\sqrt[3]{27a} + 6\sqrt[9]{a^3} =$ ____________

9. Multiplicación y división de radicales

▶ SABERES DINÁMICOS

Para poder **multiplicar o dividir radicales estos deben tener igual índice**. La operatoria cumple las siguientes propiedades.

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma y resta	Distributiva de la división respecto de la suma y resta	Cuadrado de un binomio	Diferencia de cuadrados
$a \cdot (b \pm c) = ab \pm bc$ $(b \pm c) \cdot a = ab \pm ac$	$(b \pm c) : a = b : a \pm c : a$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
$\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{8}) =$ $\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{8} =$ $3\sqrt{4} - 2\sqrt{16} =$ $3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -2$	$(3\sqrt{75} + \sqrt{147}) : \sqrt{3} =$ $3\sqrt{75} : \sqrt{3} + \sqrt{147} : \sqrt{3} =$ $3\sqrt{25} + \sqrt{49} =$ $3 \cdot 5 + 7 = 22$	$(3 - \sqrt{5})^2 =$ $3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 =$ $9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$	$(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) =$ $2^2 - (\sqrt{3})^2 =$ $4 - 3 = 1$

Para poder **multiplicar o dividir radicales de diferente índice**, se los debe reducir a mínimo común índice. Para ello, se debe calcular el **mcm de los índices de los radicales** con los que se quiere operar.

Para resolver se aplican las propiedades recíprocas de las distributivas de la radicación respecto de la multiplicación y división.

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y} \wedge \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \text{ con } y \neq 0$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b^3} \rightarrow \text{m.c.m. } (3; 4) = 12 \rightarrow \sqrt[3.4]{a^4} \cdot \sqrt[4.3]{b^{3.3}} \rightarrow \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{b^9} \rightarrow \sqrt[12]{a^4 \cdot b^9}$$

$$\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \rightarrow \text{m.c.m. } (4; 6) = 12 \rightarrow \sqrt[4.3]{4^3} \cdot \sqrt[6.2]{8^2} \rightarrow \sqrt[12]{4^3} \cdot \sqrt[12]{8^2} \rightarrow \sqrt[12]{64 \cdot 64} \rightarrow \sqrt[12]{4\,096} \rightarrow 2$$

$$\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}} \longrightarrow \text{m.c.m. } (4; 5) = 20 \longrightarrow \frac{\sqrt[4.5]{a^{3.5}}}{\sqrt[5.4]{b^{2.4}}} \longrightarrow \sqrt[20]{\frac{a^{15}}{b^8}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[3]{2}} \longrightarrow \text{m.c.m. } (5; 3) = 15 \longrightarrow \frac{\sqrt[5.3]{2^{3.3}}}{\sqrt[3.5]{2^5}} \longrightarrow \sqrt[15]{\frac{2^9}{2^5}} = \sqrt[15]{2^4}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/mdr* para mirar un video acerca de cómo multiplicar y dividir radicales con el mismo índice.

*Enlace acortado de https://youtu.be/ioQNiIQKzfI

ACTIVIDADES

9. Multiplicación y división de radicales

Test de comprensión

12. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) . (\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$?

b. ¿Es cierto que $\sqrt[5]{3} . \sqrt[4]{2} = \sqrt[20]{3^4 . 2^5}$?

c. Confeccionen una tabla con las propiedades distributivas de la multiplicación y la división respecto de la suma y resta. Escriban ejemplos donde las propiedades estén mal aplicadas.

13. Resuelvan. Mencionen el nombre de la propiedad aplicada en cada caso.

a. $(3\sqrt{20} - \sqrt{5}) . \sqrt{5} =$

d. $(3 - \sqrt{2}) . (3 + \sqrt{2}) =$

b. $(\sqrt{12} + 4\sqrt{75}) : \sqrt{3} =$

e. $\sqrt{6} . (\sqrt{3} + 4\sqrt{2}) =$

c. $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 =$

f. $(3\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 =$

14. Encuentren un índice común para cada par de radicales.

a. $\sqrt[3]{25}$; $\sqrt{3}$

d. $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[5]{y^3}$

b. $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[3]{5}$

e. $\sqrt[6]{2a^5 b}$; $\sqrt{5ab}$

c. $\sqrt[5]{9}$; $\sqrt{7}$

f. $\sqrt[7]{32x^3y^2}$; $\sqrt{3x}$

15. Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a. $\sqrt[4]{3} . \sqrt[5]{27} =$

d. $\sqrt[5]{8a^4} : \sqrt{2a} =$

b. $\sqrt[3]{3x} . \sqrt[9]{9x^2} =$

e. $\sqrt{3x} : \sqrt[7]{9x^4} =$

c. $\sqrt[3]{2y^2} . \sqrt{2y} . \sqrt[6]{4y^5} =$

f. $\sqrt[3]{2ab^2} : \sqrt{3ab} =$

DinámicaMente

Resuelvan y encuentren la mínima expresión posible.

$\sqrt{xy} . (3.\sqrt[5]{x^3y^4} - \sqrt[5]{32x^3y^4}) =$

10. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

Como en todo cálculo combinado, para operar con radicales se deben seguir una serie de pasos, teniendo en cuenta la **jerarquía de las operaciones** y sus **propiedades**.

Para recordar pág. 43

$\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{18} + (1-\sqrt{3})^2 - \sqrt{5}\,.\,(3\sqrt{15} - 2\sqrt{60}) =$	Se separa en términos.
$\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2\,.\,3^2} + (1-\sqrt{3})^2 - \sqrt{5}\,.\,(3\sqrt{3\,.\,5} - 2\sqrt{3\,.\,5\,.\,2^2}) =$	Se escriben los radicales de cada término en su mínima expresión, cuando sea posible.
$\sqrt{3\,.\,2^2\,.\,3^2} + (1 - 2\sqrt{3} + 3) - 3\sqrt{3\,.\,5^2} + 2\sqrt{3\,.\,5^2\,.\,2^2}) =$	Se resuelve cada término respetando la jerarquía de las operaciones.
$6\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 20\sqrt{3} =$	
$9\sqrt{3} + 4$	Se resuelven las sumas y restas entre los radicales semejantes.

En el caso que el cálculo contenga expresiones literales, se procede de la misma manera:

Paso 1 $$\frac{\sqrt[3]{27.4x}\,.\,\sqrt{2x}}{\sqrt[6]{32x^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{128x^8}} : \sqrt[6]{\frac{x^7}{2}} + (1-\sqrt{2}).(1+\sqrt{2}) =$$

Paso 2 $$\frac{\sqrt[3]{3^3.2^2x}.\sqrt{2x}}{\sqrt[6]{2^5x^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{2^7x^8}} : \sqrt[6]{2^{-1}x^7} + (1-\sqrt{2})\,.\,(1+\sqrt{2}) =$$

Paso 3 $$\frac{3\sqrt[6]{2^4x^2.2^3x^3}}{\sqrt[6]{2^5x^4}} - \sqrt[6]{2^7x^8 : 2^{-1}x^7} + 1 - 2 =$$

Paso 4 $$3\sqrt[6]{2^2x} - 2\sqrt[6]{4x} - 1 =$$

$$3\sqrt[6]{4x} - 2\sqrt[6]{4x} - 1 =$$

$$\sqrt[6]{4x} - 1$$

Áreas dinámicas [Matemática y el arte]

Como vimos en la página 15 del capítulo 1, el **número de oro** es un número irracional representado por la letra griega ϕ, cuyo valor se define mediante radicales:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este número posee muchas propiedades interesantes y fue descubierto en la Antigüedad, como una relación o proporción entre dos segmentos de una recta. Esta proporción se encuentra presente en construcciones, obras de arte y también en la naturaleza.

Ingresen en **puerto.pub/numoro** para conocer más acerca del número de oro y su relación con el arte y la naturaleza.

*Enlace acortado de https://youtu.be/2QtHS5uVO1Q

10. Operaciones combinadas

Test de comprensión

16. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es correcta la siguiente igualdad? $\sqrt{5} - 3\sqrt{5}\,.\,(1 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{5}\,.\,(1 + \sqrt{2})$

b. ¿Es cierto que $\sqrt[3]{125^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{5}$?

c. Ordenen las operaciones según su jerarquía en la resolución de una operación combinada.

17. Marquen con una X la respuesta correcta de cada operación combinada.

a. $(\sqrt{32} - \sqrt{128})\,.\,\sqrt{6} =$	• $-8\sqrt{3}$ ☐	• $8\sqrt{3}$ ☐	• $24\sqrt{3}$ ☐
b. $\sqrt{2}\,.\,(3\sqrt{10} + \sqrt{90}) =$	• $4\sqrt{20}$ ☐	• $12\sqrt{5}$ ☐	• $6\sqrt{10}$ ☐
c. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\,.\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$	• 5 ☐	• $5 + \sqrt{6}$ ☐	• $5 + 2\sqrt{6}$ ☐
d. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})\,.\,(\sqrt{5} - \sqrt{3}) =$	• $8 + 2\sqrt{15}$ ☐	• $8 - 2\sqrt{15}$ ☐	• 2 ☐
e. $(\sqrt{24} + \sqrt{54}) : \sqrt{2} =$	• $5\sqrt{3}$ ☐	• $\sqrt{3}$ ☐	• $10\sqrt{3}$ ☐
f. $-4\sqrt{6} + 5\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{98} + \sqrt{50}) =$	• $-4\sqrt{6} + 10\sqrt{2}$ ☐	• $56\sqrt{6}$ ☐	• $-\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ ☐

18. Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.

a. $\sqrt[3]{4}\,.\,(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})\,.\,(\sqrt{5} + \sqrt{3}) =$

b. $(2 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{147} - \sqrt{225}) : \sqrt{3} =$

c. $(\sqrt{18} - \sqrt{98}) : \sqrt{2} + \sqrt{7}\,.\,(\sqrt[3]{216} + \sqrt{28}) + (\sqrt{7} - 3)^2 =$

d. $(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54})\,.\,\sqrt[3]{4} + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\,.\,\sqrt{3} =$

e. $(\sqrt[6]{72}\,.\,\sqrt[6]{24}) : \sqrt[6]{27} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\,.\,(\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$

f. $(2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5\sqrt{2})\,.\,\sqrt{2} + (\sqrt{6} - 1)^2 =$

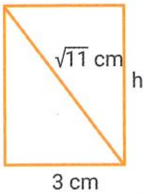
10. Operaciones combinadas

19. **Completen la tabla. Realicen en sus carpetas los cálculos necesarios.**

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Resultado
El cuadrado de la diferencia entre la raíz cuadrada de 5 y 2.		
	$2\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{2}+\sqrt{18})$	
El cociente entre la diferencia de la raíz cuadrada de 180 y la raíz cuadrada de 245, y la raíz cuadrada de 125.		
La suma entre el doble de la raíz cuadrada de 7 y el producto entre la raíz cúbica de 49 y la raíz sexta de 7.		
	$(\sqrt{128}+\sqrt{32}) : \sqrt{8}$	

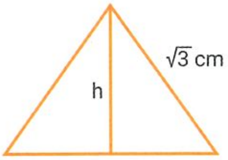
20. **Hallen el valor faltante, el perímetro y el área de las siguientes figuras.** Para recordar pág. 43

a. Rectángulo.



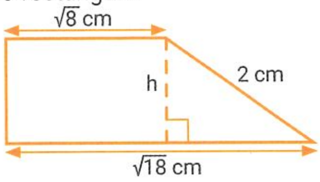
h = ______ Perímetro = ________ Área = __________

b. Triángulo equilátero.



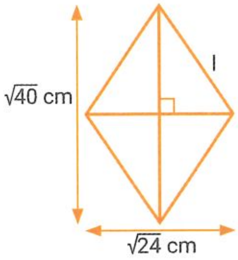
h = ______ Perímetro = ________ Área = __________

c. Trapecio rectángulo.



h = ______ Perímetro = ________ Área = __________

d. Rombo.



d = ______ Perímetro = ________ Área = __________

10. Operaciones combinadas

21. **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

a. $(1 + \sqrt{3}) : 2 - (3 - \sqrt{3})^2 =$

e. $(2\sqrt{5} + 4) \,.\, (\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{7} - 2)^2 + \sqrt{343} =$

b. $(\sqrt{2} + 1) \,.\, (\sqrt{2} - 1) - \sqrt[3]{64} \,.\, \sqrt{32} : \sqrt[6]{8} =$

f. $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{40} - (\sqrt{60} - \sqrt{375}) : \sqrt{3} + (1 - \sqrt{5})^2 =$

c. $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \,.\, (\sqrt{27} - 2\sqrt{12}) =$

g. $(1 + \sqrt{7}) \,.\, (1 - \sqrt{7}) + (\sqrt{7} + 2)^2 - \sqrt{252} =$

d. $\sqrt{\sqrt{8} \,.\, \sqrt{2}} - (\sqrt[4]{32} + \sqrt{8}) : \sqrt[4]{2} =$

h. $(1 + \sqrt{2})^3 - (\sqrt{90} - \sqrt{490}) : \sqrt{5} =$

22. **Reduzcan a su mínima expresión.**

a. $(\sqrt{a + x} - \sqrt{a}) \,.\, (\sqrt{a + x} + \sqrt{a}) =$

b. $(3\sqrt{a} - 4\sqrt{2}) \,.\, (2\sqrt{a} + 3\sqrt{2}) =$

c. $(\sqrt{a} - 2)^2 - \sqrt[4]{a^6} \,.\, \sqrt[4]{a^{-2}} - 2 - \sqrt{a} =$

d. $\sqrt[6]{5^4x^4} : \sqrt{5x} - \sqrt[3]{\sqrt{125}} \,.\, \sqrt[6]{5^4x} + (5x)^{\frac{1}{6}} =$

DinámicaMente

Verifiquen la siguiente igualdad, expliquen las propiedades aplicadas en cada paso y compartan con sus compañeros cómo lo hicieron.

$$\sqrt[3]{a} \,.\, (\sqrt[3]{a^5} - \sqrt[3]{a^2}) = a \,.\, (a - 1)$$

11. Racionalización de denominadores

▶ SABERES DINÁMICOS

Racionalizar una expresión fraccionaria con denominador irracional consiste en hallar una **fracción equivalente** a la dada, pero con **denominador racional**.
Para lograr racionalizar la expresión se procede de diferente manera según el tipo de denominador irracional que se presente. Se analizarán **tres casos**.

Caso	¿Cómo se racionaliza?	Ejemplos
Primer caso: el denominador está formado por una única raíz de índice igual a 2.	Para racionalizar este tipo de expresión, se debe amplificar la fracción multiplicando numerador y denominador por la misma raíz que tiene en el denominador.	$\frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = 3\,\frac{\sqrt{5}}{5}$
Segundo caso: el denominador está formado por una única raíz de índice mayor que 2.	Para racionalizar este tipo de expresión, se debe amplificar la fracción multiplicando numerador y denominador por una raíz que tenga el mismo índice que la raíz del denominador, cuyo radicando tenga los mismos factores, pero con exponente tal que sea igual a la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente del radicando dado.	$\frac{2}{\sqrt[5]{7^3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt[5]{7^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{2\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = 2\,\frac{\sqrt[5]{7^2}}{7}$
Tercer caso: El denominador es una suma o resta de uno o dos radicales de índice 2.	Para racionalizar este tipo de expresión, se debe amplificar la fracción multiplicando el numerador y el denominador por una suma o resta, tal que el producto entre el denominador de la expresión original y el nuevo denominador cumpla con la expresión de la *diferencia de cuadrados*: $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$	$\frac{5}{3-\sqrt{2}} \rightarrow \frac{5}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} =$ $\frac{5 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})} = \frac{5 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3)^2 - (\sqrt{2})^2} =$ $\frac{5 \cdot (3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{5}{7} \cdot (3+\sqrt{2}) =$ $\frac{15}{7} + \frac{5}{7}\sqrt{2}$

Los siguientes son ejemplos de los tres casos explicados.

- Primer caso.

$$\frac{7}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 7\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 7\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se amplifica $\frac{7}{\sqrt{2}}$ multiplicando el numerador y el denominador por la misma raíz ($\sqrt{2}$).

- Segundo caso.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

Se amplifica $\frac{5}{\sqrt[3]{2^1}}$ multiplicando el numerador y el denominador por la misma raíz del mismo índice, pero con el factor del radicando elevado a 2 ($\sqrt[3]{2^2}$), porque 2 + 1 = 3.

- Tercer caso.

$$\frac{2}{\sqrt{2}-1} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{2\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{2-1} = \frac{2\sqrt{2}+2}{1} = 2\sqrt{2}+2$$

Se amplifica $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ de tal manera que entre los denominadores se exprese una diferencia de cuadrados: $(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2$.

ACTIVIDADES

11. Racionalización de denominadores

Test de comprensión

23. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que para racionalizar la expresión $\frac{2}{\sqrt{8}}$ se la debe multiplicar por la fracción $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$?

b. ¿Es cierto que para racionalizar la expresión $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$ se la debe multiplicar por la fracción $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$?

c. ¿Por cuál fracción se debe multiplicar la expresión $\frac{5}{\sqrt[10]{x^2}}$ para racionalizarla?

24. Rodeen la fracción que debe utilizarse para racionalizar la expresión en cada caso.

a. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ • $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ • $\frac{2}{\sqrt{3}}$ • $\frac{2}{-\sqrt{3}}$ • $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ • $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ • $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ • $\frac{1}{\sqrt{7}}$ • $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

c. $\frac{3}{\sqrt{125}}$ • $\frac{3}{\sqrt{125}}$ • $\frac{3}{\sqrt{5}}$ • $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ • $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d. $\frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$ • $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}}$ • $\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$ • $\frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$ • $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}$

e. $\frac{2}{\sqrt[4]{x^3y}}$ • $\frac{\sqrt[4]{x^3y}}{2}$ • $\frac{\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt[4]{xy^3}}$ • $\frac{\sqrt[4]{x^3y}}{\sqrt[4]{x^3y}}$ • $\frac{2}{\sqrt[4]{x^3y}}$

25. Completen con los exponentes adecuados. Luego, resuelvan.

a. $\frac{3a}{\sqrt[4]{a^2by^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{a^{\square}\, b^{\square} y}}{\sqrt[4]{a^{\square}\, b^{\square} y}} =$ __________

b. $\frac{4}{\sqrt[5]{8y^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^{\square}\, y^{\square}}}{\sqrt[5]{2^{\square}\, y^{\square}}} =$ __________

c. $\frac{x}{\sqrt[7]{x^3y^4z^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^{\square}\, y^{\square}\, z^{\square}}}{\sqrt[7]{x^{\square}\, y^{\square}\, z^{\square}}} =$ __________

d. $\frac{2xa^2}{\sqrt[6]{36x^2a^5y^3}} \cdot \frac{\sqrt[6]{6^{\square}\, x^{\square}\, ay^{\square}}}{\sqrt[6]{6^{\square}\, x^{\square}\, ay^{\square}}} =$ __________

26. Racionalicen las siguientes expresiones.

a. $\frac{2}{\sqrt{2}} =$ __________

b. $-\frac{4}{\sqrt{3}} =$ __________

c. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}} =$ __________

d. $\frac{4ab}{\sqrt{2b}} =$ __________

e. $\frac{5x}{2\sqrt{xa}} =$ __________

f. $\frac{3}{\sqrt[4]{8y^3}} =$ __________

g. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} =$ __________

h. $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\sqrt{x}}} =$ __________

11. Racionalización de denominadores

27. **Marquen con una X la expresión racionalizada de la expresión dada en cada caso.**

a. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} =$ • $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ • $2\sqrt{3}-2$ ☐ • $1+\sqrt{3}$ ☐

b. $\frac{10}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} =$ • $5.(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ ☐ • $\frac{10.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{5}$ ☐ • $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}$ ☐

c. $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} =$ • $\frac{4}{3}$ ☐ • $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ ☐ • $\frac{\sqrt{7}+1}{6}$ ☐

d. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$ • $4-2\sqrt{6}$ ☐ • $-4-2\sqrt{6}$ ☐ • $3+2\sqrt{3}$ ☐

28. **Agreguen los signos que faltan para que las siguientes racionalizaciones sean correctas. Luego, resuelvan.**

a. $\frac{2}{5-\sqrt{2}} = \frac{2}{5-\sqrt{2}} \cdot \frac{5 \square \sqrt{2}}{5 \square \sqrt{2}} = \square$

b. $\frac{1}{-\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{1}{-\sqrt{3}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\square\sqrt{3} \square \sqrt{7}}{\square\sqrt{3} \square \sqrt{7}} = \square$

c. $\frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3 \square \sqrt{3}}{3 \square \sqrt{3}} = \square$

d. $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1 \square \sqrt{2}}{1 \square \sqrt{2}} = \square$

29. **Racionalicen las siguientes expresiones.**

a. $\frac{2}{\sqrt{5}-1} =$

b. $\frac{-3}{2-\sqrt{6}} =$

c. $\frac{-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} =$

d. $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} =$

e. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2} =$

f. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{20}} =$

g. $\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{14}+1} =$

h. $\frac{-5\sqrt{12}}{2-\sqrt{12}} =$

11. Racionalización de denominadores

30. Completen la tabla y realicen los cálculos en sus carpetas. Expresen el resultado en la forma más simple posible.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Resultado
La razón entre el doble de la raíz cuadrada de cinco y la raíz cuarta de ocho.		
El cociente entre el opuesto del triple de la raíz de cinco y la raíz quinta de ciento veinticinco.		
La razón entre el triple de la raíz cuadrada de seis y la diferencia entre dos y la raíz cuadrada de tres.		
El cociente entre la suma de la raíz cuadrada de doce y la raíz cuadrada de dos y el doble de la raíz cuadrada de tres elevado al opuesto de uno.		

31. Racionalicen y expresen el resultado en la forma más simple posible.

a. $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} =$ ______

d. $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}} =$ ______

b. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}} =$ ______

e. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} =$ ______

c. $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2\sqrt{27}} =$ ______

f. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$ ______

32. Reúnanse en grupos y discutan si la racionalización propuesta es correcta. Luego, compartan sus conclusiones.

"Para racionalizar la expresión $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ se debe multiplicar por la fracción $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$."

DinámicaMente

Hallen el valor de "a" si a . b = $\sqrt{3}$ y b = $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Marquen con una X la respuesta correcta.

- $a = 3 + \sqrt{3}$ ☐
- $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ☐
- $a = 3 + \sqrt{6}$ ☐
- $a = -1 - \sqrt{2}$ ☐
- $a = -\sqrt{2}$ ☐

Integración final

33. **Apliquen propiedades y expresen el resultado en la mínima expresión.**

a. $(3^{-2} : 3^{-4})^2 . 3^{-4} =$

b. $\left(\frac{3}{2}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} . \frac{27}{8} =$

c. $[(-5)^{-1}]^{-4} : (-5)^3 . [(-5)^2]^3 =$

d. $\sqrt[3]{4} . \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} . \sqrt[3]{2} =$

e. $\sqrt{7} . \sqrt{343} . \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} =$

f. $\sqrt{2a} . \sqrt[3]{a^2} : \sqrt{a} =$

g. $\sqrt{\frac{x}{a}} . \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^4}} =$

34. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ☐

b. $(a^2 b)^4 = a^8 b^4$ ☐

c. $x^{\frac{5}{3}} = x . \sqrt[3]{x^2}$ ☐

d. $(x^3 y^2)^3 = x^6 y^5$ ☐

e. $\sqrt{x} . \sqrt[4]{x^3} = x$ ☐

f. $(b . \sqrt{b})^4 = b^6$ ☐

g. $(x + \sqrt{2}) . (x - \sqrt{2}) = x^2 - 2$ ☐

35. **Completen la tabla con una expresión equivalente que contenga un único radical.**

Expresión con exponente	Expresión radical
$(ax)^{\frac{4}{7}}$	
$\left(\frac{\sqrt{y}}{a^3}\right)^{\frac{1}{6}}$	
$\left(\frac{x^2 . y^{\frac{1}{3}}}{a}\right)^{\frac{1}{5}}$	
$2^{\frac{2}{3}} . 8^{-\frac{1}{2}}$	

36. **Extraigan los factores fuera del radical cuando sea posible.**

a. $\sqrt{4802} =$

b. $\sqrt[3]{5000} =$

c. $\sqrt[4]{1875} =$

d. $\sqrt{225a^3} =$

e. $\sqrt[5]{64x^8z} =$

f. $\sqrt{\frac{243a^4x}{8b^3}} =$

37. **Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.**

a. $\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20} =$

b. $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12} =$

c. $\sqrt{175} + \sqrt{63} - 2\sqrt{28} + 2\sqrt{112} =$

d. $-2\sqrt{54} + \sqrt{150} - \frac{2}{7}\sqrt{294} + \sqrt{96} =$

e. $\sqrt[5]{160} - \frac{4}{3}\sqrt[5]{1215} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{5120} =$

f. $\sqrt[3]{54} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{250} - \frac{4}{7}\sqrt[3]{686} =$

g. $\sqrt[4]{48} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{243} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{768} =$

h. $-\sqrt[3]{\frac{2}{27}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{250} =$

38. **Resuelvan las siguientes situaciones problemáticas.**

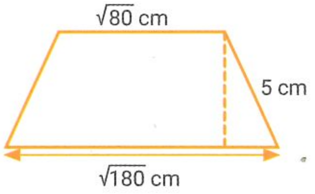
a. Hallen el perímetro de un rectángulo cuya base mide $\sqrt{5}$ cm y su diagonal $\sqrt{14}$ cm.

b. Hallen el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden $\sqrt{8}$ cm y $\sqrt{12}$ cm, respectivamente.

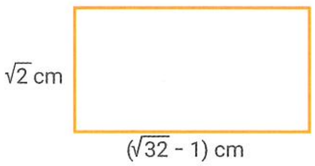
c. Calculen el área de un triángulo isósceles sabiendo que la medida de sus lados iguales es $\sqrt{6}$ cm y su base mide $\sqrt{8}$ cm.

39. **Calculen el perímetro y el área de cada figura.**

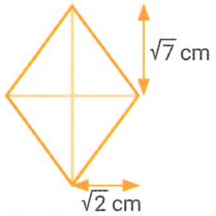
a. Trapecio isósceles.



b. Rectángulo.



c. Rombo.



40. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. $(2 - \sqrt{5})^2 =$

b. $(2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 =$

c. $(\sqrt[3]{2} - \sqrt{3})^2 =$

d. $(\sqrt{12} - 2\sqrt{8})^2 =$

e. $(3\sqrt{20} - \sqrt{45})^2 =$

f. $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{6})^2 =$

41. Resuelvan expresando como índice común.

a. $\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{3a} \,.\, \sqrt[4]{\frac{a}{2}} =$

b. $\frac{\sqrt{3a} \,.\, \sqrt[3]{2a}}{\sqrt{2a}} =$

c. $\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[6]{abc} \,.\, \sqrt[4]{ab}} =$

d. $\frac{\sqrt[5]{81x} \,.\, \sqrt{27^{-1}xy}}{\sqrt{3x^3}} =$

e. $\sqrt[3]{8a^2b} : \sqrt[5]{4a^3b^4} =$

42. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Corrijan los casos falsos.

a. $b^{\frac{1}{2}} \,.\, \sqrt{b^{\frac{2}{5}}} = b^{\frac{7}{10}}$ ☐

b. $(a^{\frac{1}{3}} \,.\, a^{\frac{1}{2}}) : \sqrt{a} = \sqrt{a}$ ☐

c. $\frac{a^{\frac{4}{5}} : \sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[4]{a^{-1}}} = a^{\frac{2}{5}}$ ☐

d. $(\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{a^5}) \,.\, a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ ☐

e. $\sqrt[3]{a^2bc^2} \,.\, \sqrt[4]{a^2b^4c} = ab \,.\, \sqrt[12]{a^2b^4c^{11}}$ ☐

f. $(b^{\frac{1}{5}} \,.\, \sqrt{b}) : b^{\frac{3}{5}} = b^{10}$ ☐

43. Racionalicen las siguientes expresiones.

a. $\frac{-2}{\sqrt{12}} =$

b. $\frac{34}{2\sqrt{17}} =$

c. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} =$

d. $\frac{21}{\sqrt{7}} =$

e. $\frac{2}{3\sqrt{10}} =$

f. $\frac{2}{\sqrt[3]{16}} =$

g. $\frac{5a}{3\sqrt{x}} =$

h. $\frac{2}{\sqrt[3]{xy^2}} =$

i. $\frac{6}{\sqrt[4]{2x^3}} =$

j. $\frac{ab}{\sqrt[6]{a^2b^3}} =$

44. Completen la siguiente tabla.

Expresión	Expresión que racionaliza	Resultado
$\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$		
$\frac{1 + \sqrt{8}}{\sqrt{2} - 1}$		
$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{-1}$		
$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$		

45. Resuelvan.

a. $(2 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3}) \,.\, (1 - \sqrt{3}) + \sqrt{2} \,.\, (\sqrt{6} + \sqrt{24}) =$

b. $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \,.\, (\sqrt{8} + \sqrt{2}) + \sqrt{125} - (\sqrt{5} - 1)^2 =$

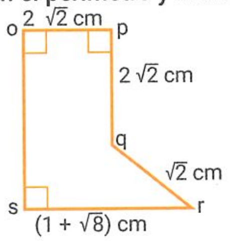
c. $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2} - 1} + (2 - \sqrt{8})^2 - \sqrt{32} \,.\, (\sqrt{50} - 2) =$

d. $\frac{\sqrt{175} - \sqrt{112}}{\sqrt{7} + 1} + \frac{5\sqrt{14}}{\sqrt{2}} - 18 \,.\, (\sqrt{63} - 3)^{-1} =$

e. $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{7})^2 + \frac{40}{2 - \sqrt{84}} =$

f. $\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{10}} + (\sqrt{10} - 2)^2 - \frac{4}{\sqrt{8} - 2} =$

46. Hallen el perímetro y el área de esta figura.



47. Tengan en cuenta los datos y resuelvan.

$M = \sqrt{3} + 2;\ S = 3\sqrt{3} - 1;\ P = 3 - \sqrt{3}.$

a. $(M + S) \,.\, P =$

b. $\frac{S \,.\, M}{P} =$

c. $(M^2 - P) : S =$

d. $M^{-1} + S \,.\, P =$

48. Traduzcan al lenguaje simbólico y resuelvan.

a. La suma entre el inverso de la raíz cúbica de cuatro y la raíz cúbica de ciento veintiocho.

b. El cociente entre el opuesto de dos y la suma de la raíz cuadrada de veinte y cinco.

c. La razón entre la suma de la raíz cuadrada de ocho y dos, y la diferencia entre dos y la raíz cuadrada de dos.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Operaciones con números reales

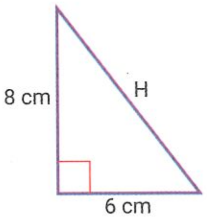
Para resolver operaciones combinadas con números reales se debe tener en cuenta la **jerarquía de las operaciones**:

Jerarquía de las operaciones

1.° Se separa en términos.
2.° Se resuelven las potencias y las raíces, cuando sea posible.
3.° Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.
4.° Se resuelven las sumas y las restas.

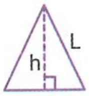
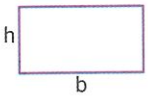
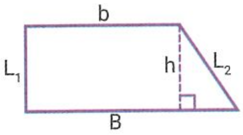
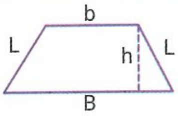
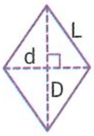
Propiedad pitagórica

En todo triángulo rectángulo, **el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos**.



$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$
$$H^2 = (8\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2$$
$$H^2 = 8^2\text{ cm}^2 + 6^2\text{ cm}^2$$
$$H^2 = 64\text{ cm}^2 + 36\text{ cm}^2$$
$$H^2 = 100\text{ cm}^2$$
$$H = \sqrt{100\text{ cm}^2}$$
$$H = 10\text{ cm}$$

Perímetro y área de algunas figuras planas

Figura	Características	Perímetro y área
	**Triángulo equilátero** La altura de un triángulo equilátero tiene un extremo en el punto medio de la base.	Perímetro = 3 . L Área = $\frac{b\,.\,h}{2}$
	**Rectángulo** Tiene dos pares de lados paralelos e iguales.	Perímetro = 2b + 2h Área = b . h
	**Trapecio rectángulo** Las bases son paralelas y tiene dos ángulos rectos.	Perímetro = $B + b + L_1 + L_2$ Área = $\frac{B + b}{2}\,.\,h$
	**Trapecio isósceles** Las bases son paralelas y los lados no paralelos son iguales.	Perímetro = B + b + 2 . L Área = $\frac{B + b}{2}\,.\,h$
	**Rombo** Todos sus lados son iguales y las diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio.	Perímetro = 4 . L Área = $\frac{D\,.\,d}{2}$

Autoevaluación

Marquen la opción correcta

49. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la dada en cada caso?

a. $y^{-2} . y^6 : (y^3 : y^4)^{-1} . x^3 . (xy)^2 =$

- ○ $x^5 . y^5$
- ○ $x^5 . y^3$
- ○ $x^4 . y^3$
- ○ $x . y^3$

b. $\dfrac{a^3 . x . a^{-2} . x^3 . (x^3 : x^4)^{-1}}{a^{-2} . x^6} =$

- ○ $a^{-1} . x^{11}$
- ○ $a^3 . x^{11}$
- ○ $a^3 . x^{-1}$
- ○ $a^{-1} . x^{-1}$

50. ¿Cuál es el resultado de cada cálculo?

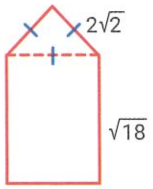
a. $-4\sqrt{294} + 2\sqrt{3750} - 3\sqrt{96} =$

- ○ $66\sqrt{6}$
- ○ $34\sqrt{6}$
- ○ $-90\sqrt{6}$
- ○ $10\sqrt{6}$

b. $\dfrac{\sqrt[5]{a^3} . \sqrt{a^4}}{\sqrt[10]{a^6}} =$

- ○ $\sqrt{a}$
- ○ $\sqrt[10]{a}$
- ○ a^2
- ○ $a\sqrt[10]{a^3}$

51. ¿Cuál es el valor del perímetro y del área de la siguiente figura?



a. Perímetro de la figura.

- ○ $12\sqrt{2}$
- ○ $14\sqrt{2}$
- ○ $11\sqrt{2}$
- ○ $5\sqrt{2}$

b. Área de la figura.

- ○ $12 + 2\sqrt{3}$
- ○ $6 + 2\sqrt{3}$
- ○ $6 + \sqrt{3}$
- ○ $4 + 2\sqrt{3}$

52. ¿Cuál es la expresión simbólica que traduce la siguiente expresión coloquial?

El cuadrado de la diferencia entre la raíz cúbica de cinco y la raíz cúbica de la raíz cuadrada de tres.

- ○ $\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}}$
- ○ $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{\sqrt{3}})^2$
- ○ $(\sqrt[3]{5} - \sqrt{3})^2$
- ○ $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$

53. ¿Cuál es la racionalización correcta de cada expresión?

a. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}} =$

- ○ $\dfrac{\sqrt[5]{9}}{3}$
- ○ $3\sqrt[10]{3^{11}}$
- ○ $\sqrt[10]{3}$
- ○ $\dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$

b. $\dfrac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}} =$

- ○ $\dfrac{17}{7} + \dfrac{4}{7}\sqrt{15}$
- ○ $-\dfrac{17}{7} - \dfrac{4}{7}\sqrt{15}$
- ○ $\dfrac{17}{7} - \dfrac{4}{7}\sqrt{15}$
- ○ $-\dfrac{17}{7} + \dfrac{4}{7}\sqrt{15}$

3 Sucesiones

12. Sucesiones

▶ SABERES DINÁMICOS

Sucesiones

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro.

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6;...\}$ ← **El conjunto de los números naturales es una sucesión de infinitos elementos.**

Se denomina **término** a cada uno de los elementos de la sucesión.

1;	3;	5;	7;	9	2n − 1
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_n

• En algunas sucesiones se puede encontrar un **término general** a_n (término enésimo), que es la fórmula de un término cualquiera en función del lugar que ocupa.

En la sucesión 1; 3; 5; 7; 9; 11; ..., el término general de la sucesión es $a_n = 2n - 1$.

• Si se conoce el término general, se puede hallar la sucesión o cualquier término de la misma, reemplazando en forma consecutiva los números naturales en el valor **n** del término general.

Si el término general de una sucesión es $a_n = 2n + 1$, entonces la sucesión será:

3; 5; 7; 9; 11; 13; .....; 2n + 1

Por lo tanto, una sucesión es una función que le asigna a todo número natural un número real.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Sucesiones aritméticas

Se denomina **sucesión aritmética** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene sumando al anterior un número constante **r**, llamado razón aritmética.

2; 7; 12; 17; 22; ... → **Sucesión aritmética con r = 5.**

2 + 5   7 + 5   12 + 5   17 + 5

• Para que una sucesión sea aritmética, debe verificarse que: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n = r$

Sucesiones geométricas

Se denomina **sucesión geométrica** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene multiplicando el anterior por un número constante **q ≠ 0**, llamado razón geométrica.

3; −6; 12; −24; 48; ... → **Sucesión geométrica con q = −2.**

3 . (−2)   −6 . (−2)   12 . (−2)   −24 . (−2)

• Para que una sucesión sea geométrica, debe verificarse que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow q \neq 0.$

ACTIVIDADES

12. Sucesiones

Test de Comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que el cuarto término en la sucesión $a_n = 5 + 2 \,.\, (n - 1)$ es 21?
   b. ¿Es cierto que la razón aritmética de la sucesión $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$;... es r = 1?
   c. La sucesión 1; 2; 6; 24; 120;..., ¿es aritmética, geométrica o ninguna de las dos?

2. Escriban los siguientes tres términos en cada sucesión.

a. 5; 2; −1; −4; −7;... ____________________

b. 3; 7; 12; 18; 25;... ____________________

c. $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$;... ____________________

d. 1; 4; 8; 11; 22; 25;... ____________________

3. Escriban los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones, a partir del término general.

a. $a_n = 3n - 1$ ____________________

b. $a_n = 3 \,.\, (n-1)$ ____________________

c. $a_n = n - 3$ ____________________

d. $a_n = (-1)^n$ ____________________

4. Observen la siguiente sucesión de figuras.

Siendo a_n: cantidad de segmentos de la figura en la posición n.

a. Dibujen en la carpeta el quinto y el sexto término de la sucesión.

b. Marquen con una X el término general de la sucesión.

$a_n = 3n$ ☐ $a_n = 1 + 2n$ ☐ $a_n = 2 + n$ ☐

c. ¿Cuál es el término que tiene 61 segmentos? ____________________

d. ¿Es una sucesión aritmética, geométrica o ninguna de las dos opciones? Expliquen la respuesta.

____

e. Hallen la razón. ____________________

5. Reúnanse en grupos, tengan en cuenta el cuadrado y resuelvan.

1 cm

a. Dividan el cuadrado de 1 cm de lado en dos partes de igual área. Coloreen una de las mitades.

b. Reiteren 3 veces el proceso con la mitad que queda sin colorear.

c. Completen la siguiente tabla, sabiendo que a_n es el área de la figura pintada en el paso n.

n	1	2	3	4	n
a_n	$\frac{1}{2}$				

d. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas con argumentos matemáticos.

- En algún momento, el cuadrado queda todo pintado. ☐ ____________________
- El área que queda sin pintar disminuye en cada paso. ☐ ____________________

13. Sucesiones aritméticas

▶ SABERES DINÁMICOS

En una **sucesión aritmética** cada término se obtiene sumándole al anterior un valor constante **r**.

$a_1 = a_1 + 0r$

$a_2 = a_1 + 1r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r = a_1 + 3r$

$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + \underbrace{r + r + ... + r}_{n - 1 \text{ veces}} = a_1 + (n - 1) . r$

El **término general** a_n es: $a_n = a_1 + (n - 1) . r$

La **razón** es igual a la diferencia entre dos términos consecutivos: $r = a_{n+1} - a_n$

• Para calcular un término determinado de una sucesión aritmética conociendo dos términos consecutivos, se deben seguir estos pasos.

Para recordar pág. 53

Calculen a_5 en una sucesión aritmética en la cual $a_1 = -2$ y $a_2 = 3$.

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 3 - (-2) \Rightarrow r = 5$ — 1. Se halla la razón r.

$a_5 = a_1 + (5 - 1) . r \Rightarrow a_5 = -2 + 4 . 5 \Rightarrow a_5 = 18$ — 2. Se calcula el término pedido.

• Para calcular un término determinado de una sucesión aritmética conociendo otro término y la razón, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_4, si $a_9 = 3$ y $r = 2$.

Se considera a a_4 como primer término ($a_4 \rightarrow a_1$) y a a_9, por lo tanto, como sexto ($a_9 \rightarrow a_6$).

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1) . r \Rightarrow 3 = a_1 + 5 . 2 \Rightarrow a_1 = 3 - 10 \Rightarrow a_1 = -7 \rightarrow a_4 = -7$

• Para calcular el número de términos de una sucesión aritmética, se deben seguir estos pasos.

Calculen el número de términos de la sucesión aritmética, sabiendo que $a_1 = 5; a_2 = 8; ...; a_n = 68$.

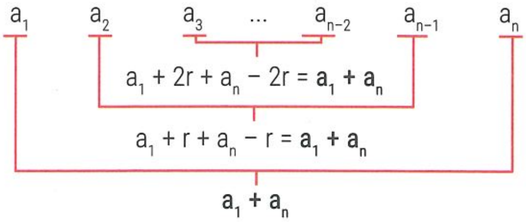
$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 8 - 5 \Rightarrow r = 3;$ — 1. Se halla la razón r.

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow 68 = 5 + (n - 1) . 3 \Rightarrow$ — 2. Se calcula la cantidad de términos n.

$63 = (n - 1) . 3 \Rightarrow 21 = n - 1 \Rightarrow n = 22$

Suma de los términos de una sucesión aritmética

La **suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética** se obtiene de la siguiente manera.



La suma de los *n* primeros términos es: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) . n}{2}$

• Para calcular la suma de los términos de una sucesión aritmética se deben conocer el primer término, el último y la cantidad de términos.

Calculen la suma de todos los números múltiplos de 3 comprendidos entre 23 y 62, inclusive.

Primer término (a_1) = 24; último término (a_n) = 60.

$60 = 24 + (n - 1) . 3 \Rightarrow 36 = (n - 1) . 3 \Rightarrow 12 = n - 1 \Rightarrow n = 13$ — 1. Se calcula la cantidad de términos n.

$S_n = \frac{(24 + 60) . 13}{2} \Rightarrow S_n = \frac{84 . 13}{2} \Rightarrow S_n = 546.$ — 2. Se calcula la suma de los n términos.

ACTIVIDADES

13. Sucesiones aritméticas

Test de Comprensión

6. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. La razón de una sucesión aritmética, ¿es siempre un número entero?

b. La sucesión formada por los múltiplos de 5, ¿es aritmética?

c. La suma de los 100 primeros números naturales ¿es 101 . 50?

7. Calculen los cuatro primeros términos de cada sucesión aritmética.

a. La suma de los dos primeros es 12 y la razón es −2. __________

b. La razón es $-\frac{1}{2}$ y $a_2 = 2$. __________

8. Tengan en cuenta los datos y calculen el valor pedido de cada sucesión aritmética.

a. $a_1 = -2$ y $a_2 = 3$. __________ $a_7 =$

b. $a_1 = -4$ y $r = -2$. __________ $a_{10} =$

c. $a_5 = 2$ y $a_7 = 0$. __________ $a_1 =$

d. $a_1 = -4$ y $a_2 = a_1 + 3$. __________ $a_8 =$

e. $a_1 = -4$; $a_7 = 14$. __________ $S_7 =$

f. $a_1 = 15$; $n = 12$; $r = -3$. __________ $S_{12} =$

9. Calculen sabiendo que $S_5 = 50$ y $r = 3$.

a. $a_1 =$ __________

b. $a_5 =$ __________

c. $S_7 =$ __________

10. Reúnanse con un compañero, observen la siguiente secuencia de números triangulares y resuelvan.

a. Dibujen en sus carpetas los dos términos que siguen.

b. ¿Cuál es el décimo número triangular? Indiquen de qué manera se puede calcular sin dibujarlo.

____

11. Calculen sabiendo que $a_n = 3 - 2n$.

a. Los 5 primeros términos de la sucesión. __________

b. Indiquen si la sucesión es aritmética y en caso de serlo escriban la razón. __________

c. $S_7 =$ __________

14. Sucesiones geométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

En una **sucesión geométrica** cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor constante **q**, siendo **q ≠ 1**. Para recordar pág. 53

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$a_2 = a_1 \cdot q^1$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ veces}} = \mathbf{a_1 \cdot q^{n-1}}$

El **término general** a_n es: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

La **razón** es igual al cociente entre dos términos consecutivos: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; $a_n \neq 0$.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/suce * para mirar un video y conocer más acerca de las sucesiones.

* Enlace acortado de https://www.educ.ar/recursos/102809/sucesiones

• Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica conociendo dos términos consecutivos, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_4 en una sucesión geométrica en la cual $a_1 = 2$ y $a_2 = -6$.

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{-6}{2} \Rightarrow q = -3$ — **1.** Se halla la razón q.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_4 = 2 \cdot (-3)^3 \Rightarrow a_4 = -54$ — **2.** Se calcula el término pedido.

• Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica conociendo otro término y la razón, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_5 si $a_7 = 16$ y $q = -4$.

Se considera a_5 como primer término ($a_5 \rightarrow a_1$) y a_7, por lo tanto, como tercero ($a_7 \rightarrow a_3$).

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot (-4)^{3-1} \Rightarrow 16 = a_1 \cdot 16 \Rightarrow a_1 = \frac{16}{16} \Rightarrow a_1 = 1 \rightarrow a_5 = 1$

• Para calcular el número de términos de una sucesión geométrica, se deben seguir estos pasos.

Calculen el número de términos de la sucesión geométrica, sabiendo que $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 2$; ...; $a_n = 128$.

$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow q = \frac{2}{0{,}5} \Rightarrow q = 4$ — **1.** Se halla la razón q.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 128 = 0{,}5 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 128 : 0{,}5 = 4^{n-1} \Rightarrow$ — **2.** Se calcula la cantidad de términos n.

$256 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^4 = 4^{n-1} \Rightarrow 4 = n - 1 \Rightarrow n = 5$

Suma de los términos de una sucesión geométrica

La **suma de los n primeros términos** de una sucesión geométrica se obtiene con la siguiente fórmula.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \wedge q \neq 1$$

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

El carbono 14 (C_{14}) es un isótopo radiactivo del carbono que se usa en la técnica de la datación y permite estimar la edad de los fósiles y otras materias orgánicas. El carbono 14 tarda aproximadamente 5 730 años en reducir a la mitad su cantidad en la muestra, lo que se conoce como semivida o período de semidesintegración. Al cabo de otro período similar queda solo la mitad de la mitad anterior y así sucesivamente.

La masa (M) de 1 gramo de C_{14} a lo largo del tiempo (t: medido en períodos de 5 730 años) se puede expresar según la siguiente fórmula: $M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Esta es una sucesión geométrica con $q = \frac{1}{2}$ y $a_1 = \frac{1}{2}$ tal que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ACTIVIDADES

14. Sucesiones geométricas

Test de Comprensión

12. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. $a_n = 2 + 2^{n-1}$ ¿es el término general de una sucesión geométrica?

b. La suma de los 5 primeros términos de $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, ¿es $\left(\frac{31}{16}\right)$?

c. En una sucesión geométrica, si se alternan términos positivos y negativos, ¿qué signo tiene la razón?

13. Escriban los cuatro primeros términos de cada sucesión geométrica.

a. $a_1 = 7$ y $a_4 = -189$. ________________

b. $S_4 = -15$ y $q = \frac{1}{2}$. ________________

14. Tengan en cuenta los datos y calculen el valor pedido de cada sucesión geométrica.

a. $q = \sqrt{2}$; $a_1 = 3$; $a_7 =$ ________________

b. $a_2 = 12$ y $a_4 = 108$; $a_1 =$ ________________

c. $a_2 = \frac{1}{3}a_1$; $q =$ ________________

d. $a_1 = 3$; $a_4 = -81$; $a_n = 243$; $n =$ ________________

e. $a_1 = 40$; $a_2 = \frac{1}{2}a_1$; $S_n = 75$; $n =$ ________________

f. $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = 2$; $S_4 =$ ________________

15. Calculen lo pedido sabiendo que $S_3 = 49$ y $q = 2$.

a. $a_1 =$ ________________

b. $a_3 =$ ________________

c. $S_5 =$ ________________

16. Tengan en cuenta los datos y hallen la suma de los seis primeros términos de la sucesión geométrica.

$a_1 = 2$; $\frac{a_7}{a_4} = \frac{1}{8}$; $S_6 =$ ________________

17. Reúnanse con un compañero, observen la siguiente sucesión de cuadrados y resuelvan. Tengan en cuenta que los vértices de cada cuadrado son los puntos medios de los lados del cuadrado anterior.

a. Completen la siguiente tabla, sabiendo que a_n es el perímetro del cuadrado formado en el paso n.

n	1	2	3	4	5	n
a_n	4					

b. La sucesión de los perímetros, ¿es geométrica? ¿Por qué? ________________

c. Si respondieron que sí al ítem anterior, indiquen la razón. $q =$ ________________

Integración final

18. **Escriban los siguientes tres términos de cada sucesión.**

a. 1; 1; 2; 3; 5; 8;...

b. −3; 9; −27; 81;...

c. 1; −1; −3; −5;...

d. $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9};...$

19. **Escriban los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.**

a. $a_n = (-1)^n$

b. $a_n = -2n + 1$

c. $a_n = 2^n - 2$

d. $a_n = n \cdot (n + 1)$

e. $a_n = \frac{1}{n}$

f. $a_n = n^2 - 1$

20. **Escriban el término general de cada sucesión.**

a. 2; 5; 8; 11; 14...

b. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8};...$

c. 1; −2; 4; −8;...

d. $1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3;...$

21. **Tengan en cuenta las sucesiones de la actividad anterior y completen.**

Ítem	Aritmética, geométrica o ninguna de las dos	Razón
a.		
b.		
c.		
d.		

22. **Resuelvan teniendo en cuenta el concepto de múltiplo.**

a. ¿Cuántos múltiplos de 5 hay entre 21 y 132?

b. ¿Cuántos múltiplos de 4 son menores que 128?

23. **Hallen el término general de la sucesión aritmética o geométrica que represente lo indicado en cada caso.**

a. La sucesión de los múltiplos de 5 mayores que 14.

b. La sucesión de los números pares múltiplos de 3.

c. La sucesión de las potencias de 3.

24. **Escriban los tres primeros términos de una sucesión aritmética con $r = -\frac{1}{2}$ y $a_6 = 1$.**

25. **Calculen teniendo en cuenta que se trata de sucesiones aritméticas.**

a. El valor de n, sabiendo que el primer término es −5, la razón es 4 y el último término es 19.

b. El valor de r, sabiendo que $a_1 = 8$ y el $a_7 = -16$.

26. **Calculen la cantidad de términos de la sucesión aritmética de cada caso.**

a. $a_1 = -20$; $a_n = -65$ y $r = -3$.

b. $r = 4$; $a_1 = 14$ y $a_n = 42$.

c. $a_1 = 2$; $a_2 = 2a_1 + 3$ y $a_n = 17$.

d. $S_n = -21$; $a_1 = 3$ y $a_n = -9$.

27. **Marquen con una X la respuesta correcta.**

a. La suma de los múltiplos de 4 comprendidos entre 4 y 24 es:

56 ☐ 60 ☐ 84 ☐

b. La suma de los primeros quince términos de la sucesión aritmética $a_n = \frac{n+1}{2}$ es:

$\frac{133}{2}$ ☐ $\frac{135}{2}$ ☐ $\frac{139}{2}$ ☐

28. **Tengan en cuenta los datos de cada sucesión aritmética y calculen lo pedido.**

a. $S_6 = 42$; $a_2 = 4$ $a_1 =$ ☐

b. $a_1 = \frac{3}{4}$; $a_3 = \frac{5}{4}$ $a_6 =$ ☐

c. $a_5 = 9\pi$; $a_7 = 11\pi$ $r =$ ☐

d. $a_1 + a_2 = 8$; $a_3 = 10$ $r =$ ☐

29. **Escriban el término general de las siguientes sucesiones geométricas.**

a. $3; -6; 12; -24;...$

b. $2; \frac{3}{2}; \frac{9}{8}; \frac{27}{32};...$

c. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16};...$

30. **Calculen la suma de los primeros seis términos de cada sucesión de la actividad anterior.**

31. **Calculen lo pedido en cada sucesión geométrica.**

a. $a_1 = 1;\ a_4 = 2\sqrt{2} \Rightarrow q =$

b. $a_1 = \frac{1}{2};\ a_4 = 4 \Rightarrow q =$

c. $a_2 = 2; a_3 = 4 \,.\, a_1\ (q > 0) \Rightarrow S_4 =$

32. **Tengan en cuenta el concepto de potenciación y calculen cuántas potencias de 2 hay entre 15 y 1 025.**

33. **Resuelvan.**

a. ¿Cuál es la razón en una sucesión geométrica con $a_2 = 4$; $a_4 = 16$? Escriban las dos posibilidades.

b. Calculen para cada opción la suma de los siete primeros términos de la sucesión.

34. **Calculen la cantidad de términos de cada sucesión geométrica sabiendo que:**

a. $a_1 = 10; a_n = 0{,}625; q = \frac{1}{2}$

b. $a_1 = 4; a_1 \,.\, a_2 = 12; a_n = \frac{243}{256}$

35. **Intercalen tres términos entre 4 y 9 604 si:**

a. La sucesión es geométrica.

b. La sucesión es aritmética.

36. **Lean atentamente y resuelvan.**

Las bacterias se reproducen por fisión binaria (se dividen por la mitad), siendo el tiempo de fisión en muchas especies bacterianas aproximadamente de una hora.

a. Si la población inicial es de 1 000 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá a las tres horas?

b. Completen la tabla.

Tiempo de horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias	1 000							

c. La sucesión de bacterias, ¿es una sucesión aritmética, geométrica o ninguna de las dos? Expliquen la respuesta.

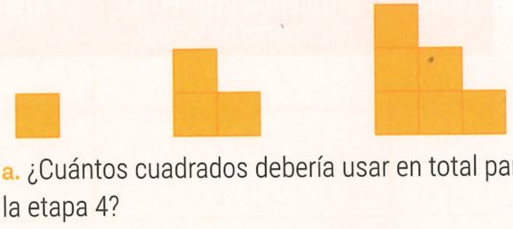
d. Escriban el término general a_n, siendo la cantidad de bacterias luego de n horas.

e. ¿Luego de cuántas horas la población es de 256 000 bacterias?

37. **Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.**

Roberto construye un patrón de escalones usando cuadrados. Hasta ahora armó 3 etapas.

Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3



a. ¿Cuántos cuadrados debería usar en total para la etapa 4?

b. Escriban los primeros siete términos de la sucesión de cuadrados.

c. Si Roberto continúa con el patrón de escalones hasta la etapa 20, ¿cuántos cuadrados necesitará él en esa etapa?

d. ¿Corresponde a una sucesión aritmética, geométrica o ninguna de las dos?

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Ecuaciones

Resolver una ecuación es encontrar, si existen, el o los valores de las variables que verifican la igualdad planteada. Dichos valores determinan el conjunto solución de la ecuación.

$8 = x + 6 . 4$	$48 = 3 + (x - 1) . 5$	$96 = 16 + (x - 1) . 2$
$8 = x + 24$	$48 - 3 = (x - 1) . 5$	$96 - 16 = (x - 1) . 2$
$8 - 24 = x$	$45 : 5 = x - 1$	$80 : 2 = x - 1$
$-16 = x$	$9 + 1 = x$	$40 + 1 = x$
$S = \{-16\}$	$10 = x$	$41 = x$
	$S = \{10\}$	$S = \{41\}$

Potenciación

- **Potenciación de exponente natural.**
  $\underbrace{a . a . a . \dots . a}_{n \text{ veces}} = a^n = b;\ a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$

  a: base; **n:** exponente; **b:** potencia.

- **Potencia con exponente 0.** $a^0 = 1;\ a \in \mathbb{R};\ a \neq 0$

- **Potencia con exponente entero negativo.** $a^{-b} = \frac{1}{a^b};\ a \in \mathbb{R};\ a \neq 0;\ b > 0$

- **Potenciación con exponente racional.** $a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b};\ a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{Z};\ c \in \mathbb{N}$

Propiedades de la potenciación

- **Producto de potencias de igual base.**
  $a^b . a^c = a^{b+c}$
  $a^{b+c} = a^b . a^c$
  El producto de potencias de igual base es otra potencia en la que se mantiene la base y se suman los exponentes.

- **Cociente de potencias de igual base.**
  $a^b : a^c = a^{b-c}$
  $a^{b-c} = a^b : a^c$
  El cociente de potencias de igual base es otra potencia en la que se mantiene la base y se restan los exponentes.

- **Potencia de otra potencia.**
  $(a^b)^c = a^{b.c}$
  $a^{b.c} = (a^b)^c$
  La potencia de otra potencia es una potencia en la que se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

- **Igualdad entre potencias de igual base.**
  $a^b = a^c \Rightarrow b = c$

3 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

38. Respondan.

a. ¿Cuál es la suma de los seis primeros términos de una sucesión geométrica, donde $a_4 = 1$; $a_6 = 4$ y $q < 0$?

○ $\frac{21}{8}$ ○ $\frac{31}{8}$ ○ $\frac{63}{8}$

b. ¿Cuál es el cuarto término de una sucesión aritmética donde $a_2 + a_6 = 34$ y $a_3 + a_6 = 39$?

○ 12 ○ 17 ○ 22

c. ¿Cuál es el primer término de una sucesión aritmética donde $r = 7$ y $S_{10} = 345$ es?

○ −3 ○ 3 ○ 6

39. ¿Qué valor debe tomar "x" para que la siguiente sucesión cumpla con lo pedido en cada caso? $4; x; \frac{1}{4}; \ldots$

a. Que sea aritmética. ○ $x = \frac{17}{8}$ ○ $x = \frac{17}{4}$ ○ $x = \frac{8}{17}$

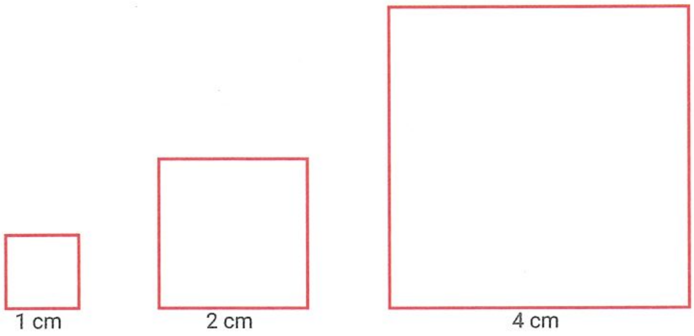
b. Que sea geométrica con $x > 0$. ○ $x = -1$ ○ $x = 1$ ○ $x = \frac{1}{2}$

40. ¿Cuál es el término general y la razón en cada una de las siguientes sucesiones?

a. 5; 9; 13; 17; 21;... ○ $a_n = 4n$ ○ $a_n = 4n + 1$ ○ $a_n = 4n + 2$

b. $\frac{3}{2}; 1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{8}{27}; \ldots$ ○ $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ ○ $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ○ $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

41. Observen atentamente y resuelvan.



a. ¿Cuáles son los cinco primeros términos de la sucesión formada por los perímetros de los cuadrados?

○ 4; 8; 16; 32; 64 ○ 4; 8; 16; 24; 32 ○ 4; 8; 12; 16; 20

b. ¿Cuál es el término general a_n, siendo a_n el perímetro del cuadrado en la posición n?

○ $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ ○ $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ ○ $a_n = 4 \cdot 2^{n}$

c. ¿Cuál es la suma de los perímetros de los primeros diez cuadrados de la sucesión?

○ 4 088 ○ 4 092 ○ 4 096

4 Ecuaciones

15. Ecuaciones de primer grado

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **ecuación** es una igualdad en la que figura una variable o incógnita.
Cuando el máximo exponente al que está elevado la variable es 1, se dice que es una **ecuación de primer grado** (llamada también **ecuación lineal**).

Resolver una ecuación de primer grado es encontrar el o los valores de la variable que verifican la igualdad planteada. Dichos valores forman el conjunto solución de la ecuación.

Ecuación	$4x - 8 = 0$	$3 \,.\, (x + 1) - 3x = 3$	$4x - 1 = (x + 2) \,.\, 4$
Procedimiento	$4x = 8$ $x = 8 : 4$ $x = 2$	$3x + 3 - 3x = 3$ $0x + 3 = 3$ $3 = 3$	$4x - 1 = 4x + 8$ $4x - 4x = 8 + 1$ $0 = 9$
Solución	Tiene una solución. $x = 2$ $S = \{2\}$	Es una identidad. Tiene infinitas soluciones.	Es un absurdo. No tiene solución. $S = \emptyset$

• Cuando la ecuación de primer grado tiene una solución se puede verificar el resultado reemplazando ese valor en la ecuación original.

$x = 1$ es solución de la ecuación $5 \,.\, (x - 1) + 4 = x + 3$, porque al reemplazar x por 1 se verifica la igualdad.

$$5 \,.\, (1 - 1) + 4 = 1 + 3$$
$$5 \,.\, 0 + 4 = 1 + 3$$
$$4 = 4 \longrightarrow \text{1 es solución de la ecuación.}$$

• Cuando una ecuación contiene fracciones, se pueden eliminar los denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{1}{3}x - 1 = \frac{5}{2}$$

$6 \,.\, \left(\frac{1}{3}x - 1\right) = \frac{5}{2} \,.\, 6$ — **1.** Se multiplica ambos miembros por 6 (6 es el m.c.m. entre 2 y 3).

$6 \,.\, \frac{1}{3}x - 6 \,.\, 1 = \frac{5}{2} \,.\, 6$ — **2.** Se aplica propiedad distributiva.

$2x - 6 = 15$ — **3.** Se resuelve y se simplifica.

$2x = 15 + 6$ — **4.** Se hace los pasajes de términos.

$x = \frac{21}{2}$ — **5.** La solución es $S = \left\{\frac{21}{2}\right\}$.

Verificación: $\frac{1}{3} \,.\, \frac{21}{2} - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \longrightarrow \frac{21}{2}$ *es solución de la ecuación.*

15. Ecuaciones de primer grado

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Cuál de las siguientes expresiones no corresponde a una ecuación?
   $2x - 1 = 0$ ☐ $7x + 8x$ ☐ $5x = -20$ ☐
   b. ¿Es cierto que la ecuación $5 \cdot (x - 1) = 5x - 5$ no tiene solución?
   c. Verifiquen si $x = 6$ es la solución de $-\frac{1}{3}x = 2$.

2. Marquen con una X la opción que es solución de la ecuación. Verifiquen la respuesta.

a. $-2 \cdot (x + 0{,}5) + x = 4$ $x = -5$ ☐ $x = -1$ ☐ $x = -1{,}25$ ☐

b. $\frac{4x - 2}{2} = x + 1$ $x = \frac{4}{3}$ ☐ $x = 1$ ☐ $x = 2$ x ☐

3. Resuelvan las siguientes ecuaciones y escriban el conjunto solución.

a. $2x - (5x - 10) = 3x - 2 \cdot (3 + 2x)$

c. $2 \cdot (x + 1) - 2 = -9 + 2x$

b. $\frac{2 + x}{5} + \frac{x}{2} - \frac{x}{10} = 0$

d. $\frac{2x - 2}{3} - \frac{4x - 4}{6} + 4 = \sqrt{16}$

4. Inventen una ecuación que tenga por solución $x = 6$.

5. Planteen la ecuación correspondiente, resuelvan y escriban la respuesta.

La suma de tres números consecutivos es igual a 24. ¿Cuáles son los números?

16. Sistemas de ecuaciones lineales. Método gráfico

▶ SABERES DINÁMICOS

Sistemas de ecuaciones lineales

Existen ecuaciones de primer grado con dos variables, donde para cada valor asignado a una de las variables le corresponde un valor a la otra variable.

$2x + y = 9$ ⟶ Si $x = 2$, entonces $y = 5$

porque: $2 \cdot 2 + 5 = 9 \Rightarrow 4 + 5 = 9 \Rightarrow 9 = 9$

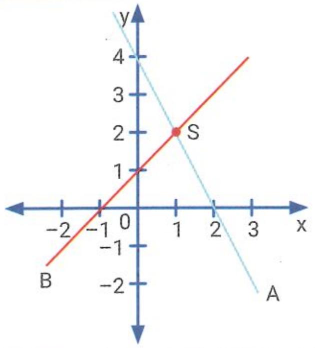
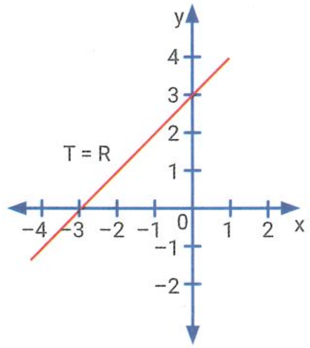
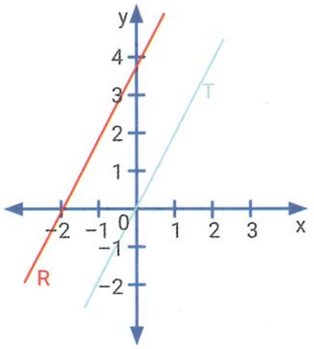
$2 \cdot (a - b) = 8$ ⟶ Si $a = 10$, entonces $b = 6$

porque: $2 \cdot (10 - 6) = 8 \Rightarrow 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow 8 = 8$

Un **sistema de ecuaciones lineales** está formado por dos ecuaciones de primer grado con dos variables y, para indicar que se forma un sistema, se las escribe abarcándolas con una llave.

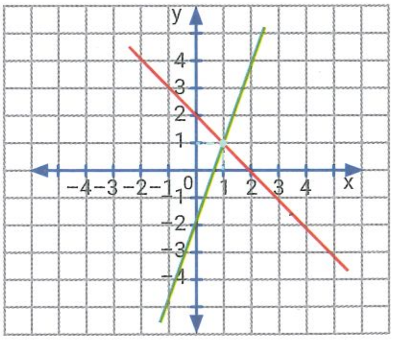
$$\begin{cases} 2y + x - 14 = 0 \\ 2x - 7 = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} y + x = 10 \\ 2x + 1 = y \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema representa una recta en el plano. Resolverlo es hallar (si existe) las coordenadas (x; y) del punto de intersección entre ambas rectas.

Rectas transversales	Rectas paralelas coincidentes	Rectas paralelas no coincidentes
		
Tienen un punto en común, por lo que la solución es única. $S = \{(x_1; x_2)\}$	Tienen infinitos puntos en común, por lo que existen infinitas soluciones. Infinitas soluciones.	No tienen ningún punto en común, por lo que no tiene solución. $S = \emptyset$
Sistema compatible determinado (S.C.D.)	**Sistema compatible indeterminado (S.C.I.)**	**Sistema incompatible (S.I.)**

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

Para **resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales**, se deben representar ambas rectas en un mismo sistema de ejes y hallar las coordenadas del punto de intersección. Para graficar las rectas, conviene escribir primero cada una de las ecuaciones en forma explícita.



$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - 2 - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

$S = \{(1; 1)\}$ S.C.D.

ACTIVIDADES

16. Sistemas de ecuaciones lineales. Método gráfico

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen sus respuestas.

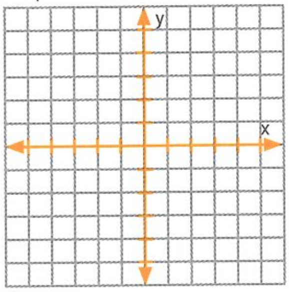
a. ¿Es cierto que dos rectas que tienen igual pendiente y diferente ordenada al origen forman siempre un sistema compatible indeterminado?

b. Dos rectas perpendiculares ¿forman un sistema compatible determinado?

c. ¿Cómo deben ser las ecuaciones de un sistema lineal para que resulte un sistema compatible indeterminado?

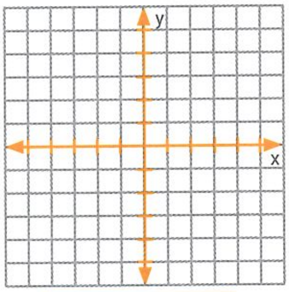
7. Resuelvan gráficamente los siguientes sistemas lineales, escriban la solución y clasifiquen el sistema.

a. $\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x - 1 - y = 0 \end{cases}$



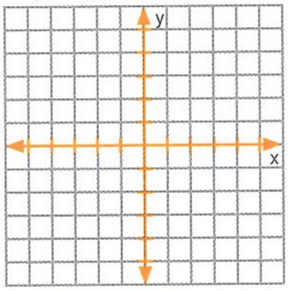
S = ______ ; clasificación: ______

b. $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ 2y - 8x - 2 = 0 \end{cases}$



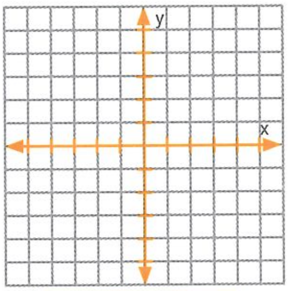
S = ______ ; clasificación: ______

c. $\begin{cases} 2y = x + 4 \\ x = \frac{1}{3}y + 1 \end{cases}$



S = ______ ; clasificación: ______

d. $\begin{cases} -2x - 6 = y \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 2 \end{cases}$



S = ______ ; clasificación: ______

8. Indiquen cuál debe ser el valor de "m" para que el sistema resulte incompatible. Luego, grafiquen el sistema.

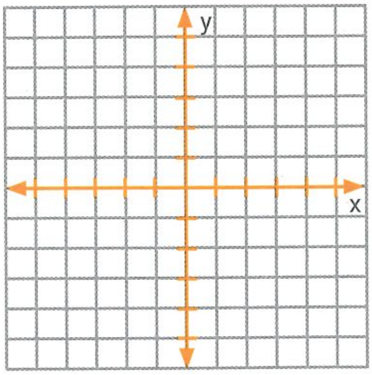
$\begin{cases} y = x - 5 \\ 3y - mx = 1 \end{cases}$

______

______

______

______



17. Resolución de sistemas de ecuaciones I

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **resolver analíticamente un sistema de ecuaciones lineales** existen diversos métodos que permiten obtener el resultado. Este resultado dependerá del tipo de sistema que se esté resolviendo.

Clasificación del sistema	Sistema compatible determinado (SCD)	Sistema compatible indeterminado (SCI)	Sistema incompatible (SI)
Analíticamente	Se obtiene un valor de "x" y un valor de "y".	Se llega a una identidad. Es decir, una igualdad numérica verdadera.	Se llega a un absurdo. Es decir, a una igualdad numérica falsa.
Solución	S = {(x; y)}	Se escribe "Tiene infinitas soluciones".	S = ∅

La solución (x; y) de un sistema debe verificar ambas ecuaciones.

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones; luego, se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/sde* para mirar un video con un ejemplo de un problema resuelto de sistemas de ecuaciones lineales.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=V29cqJNSEjs

$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ y - 2 - x = 0 \end{cases}$ → se despeja "y" de ambas ecuaciones → $\begin{cases} y = 14 - 2x \\ y = x + 2 \end{cases}$

→ se igualan las expresiones obtenidas → $14 - 2x = x + 2 \Rightarrow 14 - 2 = x + 2x \Rightarrow$

$12 = 3x \Rightarrow 12 : 3 = x \Rightarrow x = 4$

Con el valor de **x** obtenido, se halla el valor de **y** → $y = x + 2 = 4 + 2$ → $y = 6$ S = {(4; 6)} S.C.D.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones; luego, se reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ y - 2 = x - 1 \end{cases}$
→ se despeja "x" de la primera ecuación → $x = 5 - y$
→ se reemplaza la expresión en la segunda ecuación → $y - 2 = 5 - y - 1 \Rightarrow 2y = 5 - 1 + 2$

$\Rightarrow y = 6 : 2 \Rightarrow y = 3$

Con el valor de **y** obtenido, se halla el valor de **x** → $x = 5 - y = 5 - 3$ → $x = 2$ S = {(2; 3)} S.C.D.

17. Resolución de sistemas de ecuaciones I

▶ SABERES DINÁMICOS

Método de reducción por sumas y restas

Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones multiplicando los dos miembros convenientemente (se obtiene un sistema equivalente al dado). Luego, se restan ambas ecuaciones para eliminarla.

$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 4y = -4 \end{cases}$ → Se multiplica una ecuación por el número conveniente para igualar los coeficientes de la incógnita elegida. → $3 \,.\, (x + 2y) = 3 \,.\, 2 \Rightarrow 3x + 6y = 6$

$\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 3x - 4y = -4 \end{cases}$ → Se restan ambos miembros de las ecuaciones. →

$$\begin{array}{r} 3x + 6y = 6 \\ -\; 3x - 4y = -4 \\ \hline 10y = 10 \end{array} \Rightarrow y = 1$$

Con el valor de **y** obtenido, se halla el valor de **x** → $3x - 4 \,.\, 1 = -4 \rightarrow 3x = -4 + 4 \rightarrow x = 0$ $S = \{(0; 1)\}$ S.C.D.

ACTIVIDADES

17. Resolución de sistemas de ecuaciones I

Test de comprensión

9. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. En el método por sustitución, ¿se puede despejar cualquier incógnita?

b. ¿Qué se obtiene al resolver analíticamente un sistema cuyas rectas son paralelas no coincidentes?

c. ¿Es cierto que la solución de un sistema depende del método elegido para resolverlo?

10. Resuelvan los siguientes sistemas por el método de igualación y escriban el conjunto solución.

a. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 5y = -3 \\ 2x = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}y \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3 \,.\, (x - 1) - y = 0 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

17. Resolución de sistemas de ecuaciones I

11. Resuelvan los siguientes sistemas por el método de sustitución y escriban el conjunto solución.

a. $\begin{cases} \frac{5}{2}x - y = 2 \\ 2x + 8y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 9 = 15y \\ 4x - 30y + 18 = 0 \end{cases}$

12. Resuelvan los siguientes sistemas por el método de sumas y restas y escriban el conjunto solución.

a. $\begin{cases} \frac{3 \,.\, (x - y)}{2} = 6 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 6x - 5y = -14 \\ 3x + 5y = 23 \end{cases}$

13. Trabajen con un compañero resolviendo analíticamente los siguientes sistemas por métodos diferentes. Escriban la solución y luego comparen sus resultados.

a. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2x - y}{6} = x \\ \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y = -\frac{7}{2} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{6x - 5y}{2} = -7 \\ 3x + 5y = 23 \end{cases}$

17. Resolución de sistemas de ecuaciones I

14. Hallen el valor de k para que el sistema resulte incompatible.

$$\begin{cases} kx + 2y - 1 = 0 \\ 3x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

15. Tengan en cuenta el siguiente sistema y escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -y - m + x = 0 \end{cases}$$

a. Si m = 7, el sistema no tiene solución. ☐

b. Si m = 3, el sistema tiene infinitas soluciones. ☐

c. Si m = 0, el sistema tiene infinitas soluciones. ☐

16. Planteen el sistema de ecuaciones, resuelvan y escriban la respuesta del problema.

a. En un club con 1 300 socios hay dos categorías: mayores y menores. Si la cantidad de socios menores es igual al doble de socios mayores disminuido en 200, ¿cuántos socios hay en cada categoría?

b. El perímetro de un rectángulo es 20 cm y la altura es 1 cm mayor que la mitad de la base. ¿Cuál es el área del rectángulo?

17. Lean atentamente y resuelvan.

Juan calculó el costo C (en pesos) del viaje según la distancia D (en kilómetros) recorrida para las dos remiserías que tiene cerca de su casa.

Remisería "Mejor viaje": C = 110 + 35D

Remisería "Confort": C = 134 + 31D

Su amigo Leo le comentó que él hizo el mismo viaje con ambas remiserías y le cobraron lo mismo. ¿Será siempre así? ¿Cuál fue la distancia de los viajes de Leo?

18. Resolución de sistemas de ecuaciones II

▶ SABERES DINÁMICOS

Método usando la regla de Cramer

Se llama **matriz cuadrada** a una matriz con el mismo número de filas y columnas. A cada matriz cuadrada se le asocia un número llamado **determinante**.
El determinante de una matriz A se escribe **|A|** y se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 7 \,.\, (-8) - (-4) \,.\, (-3) = -56 - 12 = -68$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \,.\, 2 - 0 \,.\, 5 = 8 - 0 = 8$$

La **regla de Cramer** es un método para resolver sistemas de ecuaciones cuadrados (es decir que contengan el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) utilizando determinantes.
El procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones de 2 x 2 es el siguiente:

1. El sistema debe estar ordenado.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 x = c_2 \end{cases}$$

2. Se calculan tres determinantes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Determinante general
Se forma con los coeficientes de las incógnitas.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Determinante en "x"
Se reemplazan en Δ los coeficientes de "x" por los términos independientes.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Determinante en "y"
Se reemplazan en Δ los coeficientes de "y" por los términos independientes.

3. Se calculan los valores de las incógnitas: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ -2x + y = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 36$$

$$x = \frac{-12}{6} = -2 \qquad y = \frac{36}{6} = 6 \qquad S = \{(-2;6)\}$$

La clasificación de un sistema se define de acuerdo con los valores de los determinantes.

Sistema compatible determinado (SCD)	Sistema compatible indeterminado (SCI)	Sistema incompatible (SI)
$\Delta \neq 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = 0; \Delta_x \neq 0; \Delta_y \neq 0$

ACTIVIDADES

18. Resolución de sistemas de ecuaciones II

Test de comprensión

18. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cómo deben estar ordenadas las ecuaciones para poder resolverlas usando regla de Cramer?

b. ¿Es cierto que siempre que $\Delta = 0$, el sistema es incompatible?

c. El resultado de un determinante, ¿es siempre un número entero?

19. Resuelvan los siguientes sistemas usando la regla de Cramer y clasifíquenlos.

a. $\begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ -x + 10y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2.(x + y) = 8 \\ -x - y = -5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x - 2.(y + 9) = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x = y \\ \dfrac{6x - 8}{2} - y = 0 \end{cases}$

20. Resuelvan con el método de Cramer. Luego, escriban las ecuaciones del sistema a partir de los determinantes y resuelvan por otro método analítico para verificar que da lo mismo. Clasifiquen el sistema.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 44 & 1 \\ 32 & -2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 44 \\ 2 & 32 \end{vmatrix}$$

21. Planteen las ecuaciones y luego resuelvan el sistema usando la regla de Cramer.

El triple de la suma de dos números es igual a 21. Hallen los números sabiendo que uno de ellos es igual al doble del otro, aumentado en 4 unidades.

Integración

22. Eliminen los denominadores y resuelvan las ecuaciones.

a. $\frac{x}{5} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{10}$

b. $\frac{2x-7}{3} = \frac{2-x}{6}$

c. $\frac{1}{4}x - x = \sqrt{\frac{9}{4}}$

d. $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} - x = \frac{x}{8}$

23. Verifiquen si la solución de cada sistema es la dada.

a. $\begin{cases} 6 \,.\, (x + 2y) - 1 = 0 \\ x = 4y - 1 \end{cases}$

$S = \left\{\left(-\frac{2}{9}; \frac{7}{36}\right)\right\}$

b. $\begin{cases} x = 5y \\ 3x - 4y - 1 = 21 \end{cases}$

$S = \{(5; 1)\}$

24. Resuelvan dos sistemas por igualación y dos por sustitución. Escriban la solución.

a. $\begin{cases} 5 \,.\, (x - 1) + y = 1 \\ y + x = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 2y = -8 \\ 3x = 12 + 6y \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{1}{4} \,.\, (2y - x) + 3 = 0 \\ 3x = 2y - 14 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x = 4 - y \\ 3 - 8x + 12y = 0 \end{cases}$

25. Resuelvan dos sistemas por sumas o restas y dos usando regla de Cramer.

a. $\begin{cases} 4x = 20 - 3y \\ x + 0{,}5y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 8x + 3y + 2 = 0 \\ 20 - x = -3y \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5 \,.\, (x + y) = 10 \\ 2y = -2x + 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 25y = x \\ 28 - 9x = -85y \end{cases}$

26. Resuelvan gráficamente los sistemas y escriban la solución.

a. $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x = 3y - 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5y = -3x - 8 \\ 8y = 10 - x \end{cases}$

27. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

$\begin{cases} y + mx = 8 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

a. Para m = 2 el sistema es incompatible. ☐

b. Para m = −2 el sistema es compatible indeterminado. ☐

$\begin{cases} y - bx - 4 = 0 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

c. Para b = 3 el sistema es incompatible. ☐

d. Para b = −3 el sistema es compatible indeterminado. ☐

28. **Resuelvan los siguientes sistemas por el método más conveniente.**

a. $\begin{cases} 2x + 2y = 6 - x \\ 2y + 10 = x \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{x + y}{2} = 2 \\ 3x - 6 = 2y - 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{x}{5} - y = 6 \\ \frac{x + y}{3} - 2 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -(x - y) - 1 = 5 \\ y + 3 = x \end{cases}$

29. **Hallen el valor de "m" para que el sistema cumpla con la condición pedida.**

$\begin{cases} mx + y = 2 \\ 3y - 6x - 9 = 0 \end{cases}$

a. Incompatible.

b. Compatible.

30. **Completen los sistemas con una ecuación para que la solución sea la pedida en cada caso.**

a. $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ \square \end{cases}$ $S = \varnothing$

b. $\begin{cases} y + x = 2 \\ \square \end{cases}$ Infinitas soluciones.

c. $\begin{cases} y + 5x - 8 = 0 \\ \square \end{cases}$ $S = \{(1; 3)\}$

d. $\begin{cases} 5x = 5y \\ \square \end{cases}$ $S = \varnothing$

31. **Escriban V (verdadero) o F (falso). Corrijan las afirmaciones falsas.**

a. Cuando un sistema lineal es compatible determinado, entonces sus rectas resultan paralelas coincidentes. ☐

b. Cuando un sistema está formado por las ecuaciones de dos rectas paralelas no coincidentes, entonces el sistema es incompatible. ☐

c. Cuando un sistema lineal tiene por solución $S = \varnothing$, entonces el sistema es compatible indeterminado. ☐

d. Cuando al resolver por regla de Cramer da $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, el sistema es incompatible. ☐

32. **Planteen, resuelvan y escriban la respuesta.**

a. El doble de la suma entre dos números es igual a 16, y la mitad de la diferencia entre el mayor y el menor es igual a 3. ¿Cuáles son los números?

b. En un club hay socios categoría mayor y socios categoría menor. En total hay 568 socios y la cantidad de socios menores es igual al doble de socios mayores disminuida en 41. ¿Cuántos socios hay de cada categoría?

c. Calculen las edades de dos hermanos sabiendo que la razón entre las mismas es $\frac{4}{5}$ y dentro de seis años será $\frac{6}{7}$.

d. En una finca hay corrales de gallinas y de ovejas. Si en total hay 244 animales y se cuentan 736 patas, ¿cuántas gallinas y cuántas ovejas hay en los corrales?

e. En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 3 cm más que el otro lado. Si el perímetro del triángulo es de 48 cm, ¿cuánto mide cada lado del triángulo?

19. Ecuaciones de segundo grado

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **ecuación cuadrática** es aquella que tiene la forma **$ax^2 + bx + c = 0$**, donde **a**, **b**, **c** son constantes y **$a \neq 0$**.

Valores de los coeficientes	Forma de la ecuación cuadrática	Se resuelve
$a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$	Forma completa: $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$a \neq 0; b \neq 0; c = 0$	Forma incompleta: $ax^2 + bx = 0$	Se extrae factor común "x" $x . (ax + b) = 0$ y luego se plantean las condiciones: $x = 0 \vee ax + b = 0$ y se despeja el valor de "x".
$a \neq 0; b = 0; c \neq 0$	Forma incompleta: $ax^2 + c = 0$	Se despeja "x" teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2} = \|x\|$

Para **resolver ecuaciones cuadráticas** completas se puede usar la fórmula resolvente:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fres * para mirar un video donde se explica paso a paso cómo se obtiene la fórmula resolvente.

*Enlace acortado de https://youtu.be/2dZM7BAs6FE

Si la ecuación cuadrática es incompleta, se puede usar reemplazando por 0 los coeficientes faltantes.

- Se pueden resolver ecuaciones cuadráticas completas de la siguiente manera.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

Se reemplazan los valores de los coeficientes en la fórmula resolvente.

$$x_1; x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 . 2 . (-4)}}{2 . 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+6}{4} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2-6}{4} \Rightarrow x_1 = -1 \end{cases}$$

- Se pueden resolver ecuaciones cuadráticas incompletas de la siguiente manera.

$$5x^2 + 10x = 0 \rightarrow \text{Se saca factor común "x"} \rightarrow x . (5x + 10) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10}{5} \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 18 = 0 \rightarrow \text{Se despeja "x"} \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

19. Ecuaciones de segundo grado

Test de comprensión

33. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. En la ecuación cuadrática $5x^2 = 2x + 1$, ¿es cierto que a = 5, b = 2 y c = 1?

b. En la ecuación $(x + 1)^2 - 4 = 0$, ¿se puede resolver aplicando el procedimiento de ecuaciones incompletas?

c. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$?

34. Completen la tabla.

Ecuación	Forma	a	b	c
$7x^2 - 2x + 1 = 0$				
$\frac{1}{3}x^2 + 6 - 5x = 0$				
$-6x^2 + 4x = 0$				
$8x^2 = 0$				
$9 + 6x + x^2 = 0$				
$9x - 3x^2 = 0$				

35. Resuelvan las siguientes ecuaciones de segundo grado completas.

a. $4x^2 + 12x - 7 = 0$

b. $x^2 - 1 = 5x - 5$

c. $x^2 - 10x + 25 = 0$

d. $3x^2 + 10x - 8 = 0$

e. $x \cdot (6x + 4) = 10$

f. $-x^2 = 8 + x$

g. $(x + 2) \cdot (x - 2) + 8 = 4x$

h. $2x \cdot (4x - 5) = 3$

19. Ecuaciones de segundo grado

36. Completen la tabla con las soluciones de cada ecuación.

Ecuación	Soluciones x_1; x_2
$2x^2 - 50 = 0$	
$6x^2 + 12x = 0$	
$5x^2 = 20$	
$x^2 = 8x$	
$-3x^2 = 0$	
$-x^2 = x$	

37. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. Todas las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones distintas. ☐

b. Todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver con la fórmula resolvente. ☐

c. En las ecuaciones cuadráticas el coeficiente "a" puede valer 0. ☐

d. Para aplicar la fórmula resolvente la ecuación debe quedar expresada así: $ax^2 + bx = c$. ☐

e. Si en la fórmula resolvente, $b^2 - 4ac$ es igual a 0, las dos soluciones son iguales. ☐

38. Completen según corresponda.

a. ☐ $+ 5x =$ ☐ $. (10x +$ ☐ $) = 0$ → $x_1 =$ ☐ ; $x_2 =$ ☐

b. $-3x^2 -$ ☐ $= x . ($ ☐ $- 1) = 0$ → $x_1 =$ ☐ ; $x_2 =$ ☐

c. ☐ $- 6 = 0 \Rightarrow x^2 =$ ☐ $: 6 \Rightarrow$ ☐ $= \sqrt{1}$ → $x_1 =$ ☐ ; $x_2 =$ ☐

d. ☐ $= 0 \Rightarrow x^2 =$ ☐ → $x_1 =$ ☐ ; $x_2 =$ ☐

19. Ecuaciones de segundo grado

39. Calculen el valor de "m", conociendo el valor de una de las raíces.

a. $x = 3$ es raíz de $2x^2 + mx - 6 = 0$.

b. $x = -4$ es raíz de $-x^2 - 3x + m = 0$.

40. Indiquen cómo debe ser el resultado de "$b^2 - 4ac$" para que la ecuación cuadrática no tenga soluciones reales. Expliquen la respuesta a través de un ejemplo.

41. Lean cada problema, planteen la ecuación y resuélvanla. Escriban la respuesta del problema.

a. El producto entre un número y su consecutivo es igual a doce. ¿Cuál es el número?

b. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm. Uno de los catetos es 14 cm más largo que el otro. Calculen las longitudes de los catetos.

c. La diferencia entre el producto de dos números naturales consecutivos y 272 es igual a cero. ¿Cuáles son los números?

d. El cuadrado del doble de un número es igual a la mitad de 32. ¿Cuáles son los números?

20. Sistemas de ecuaciones mixtos

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **sistema de ecuaciones mixto** con dos variables es aquel sistema de ecuaciones en el que al menos una de sus ecuaciones es de segundo grado.

Sistema mixto formado por una ecuación lineal y una ecuación de segundo grado. ⟶ $\begin{cases} y - 4x + 6 = 0 \\ 2y = 4x^2 - 8x - 12 \end{cases}$

Sistema mixto formado por dos ecuaciones de segundo grado. ⟶ $\begin{cases} x^2 + 1 = y + 3x \\ y + 2x^2 = 4x - 7 \end{cases}$

Resolver analíticamente un sistema de ecuaciones mixto significa encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente ambas ecuaciones que forman el sistema.

- Para resolver estos sistemas lo más conveniente es utilizar el método de igualación.

a.

$$\begin{cases} y - x = 6 \rightarrow y = x + 6 \\ y - x^2 = 2x \rightarrow y = x^2 + 2x \end{cases}$$

$x^2 + 2x = x + 6$

$x^2 + 2x - x - 6 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$ → Se resuelve la ecuación cuadrática: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Luego, para cada valor de "x" obtenido, se encuentra el valor de "y" usando cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

$$y = 2 + 6 = 8$$
$$y = -3 + 6 = 3$$

El sistema tiene dos soluciones: $S = \{(2; 8), (-3; 3)\}$

b.

$$\begin{cases} x = y - 4 \rightarrow y = x + 4 \\ -x^2 - 5 - y = 0 \rightarrow y = -x^2 - 5 \end{cases}$$

$-x^2 - 5 = x + 4$

$-x^2 - 5 - x - 4 = 0$

$-x^2 - x - 9 = 0$ → Se resuelve la ecuación cuadrática: no tiene raíces reales.

El sistema no tiene solución: $S = \varnothing$

ACTIVIDADES

20. Sistemas de ecuaciones mixtos

Test de comprensión

42. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Un sistema mixto ¿puede estar formado por estas dos ecuaciones: "$y + x^2 = x^2 + x$"; "$y - x - 1 = 0$"?

b. ¿Es cierto que todos los sistemas mixtos tienen dos soluciones distintas?

c. Al igualar las ecuaciones y aplicar la fórmula resolvente para encontrar las soluciones, ¿cómo resulta "$b^2 - 4ac$" cuando el sistema no tiene solución real?

43. **Marquen con una X los sistemas que son mixtos.**

a. $\begin{cases} 2y + 2x = 9 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$ ☐

b. $\begin{cases} x + 5 = y - 3^2 \\ x = -y \end{cases}$ ☐

c. $\begin{cases} 2 \,.\, (y + 1) = 10x \\ (x - 1)^2 - y = 0 \end{cases}$ ☐

d. $\begin{cases} (1 + x) \,.\, 5 - y = 0 \\ y - x^2 = 3 - x^2 \end{cases}$ ☐

44. **Resuelvan los sistemas. Luego, unan con flechas cada sistema con sus soluciones.**

a. $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y + 6x - 4 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 = y \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2y - 8 = 4x^2 \\ y = x^2 + x + 4 \end{cases}$

- (0; 4)
- (1; 1)
- (−6; 40)
- (2; −6)
- (1; 6)
- (6; 1)

DinámicaMente

Tengan en cuenta el siguiente sistema de ecuaciones y encuentren los valores de "x" para los cuales se cumplan las condiciones pedidas.

$$\begin{cases} y_1 = x^2 - 5x - 6 \\ y_2 = -x - 10 \end{cases}$$

a. $y_1(x) > y_2(x)$

b. $y_1(x) < y_2(x)$

20. Sistemas de ecuaciones mixtos

45. Resuelvan analíticamente los siguientes sistemas mixtos.

a. $\begin{cases} y - x^2 = 4 \\ y + 6x + 5 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y + x^2 = 4 \\ y - x^2 + 4 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = 2 \,.\, (x - 1) \,.\, \left(x + \frac{3}{2}\right) \\ y + 2x = 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = x \\ 3 \,.\, (x^2 + y) + 9 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y + 1 = -12x \\ y + 8x - 3 = x^2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} y = (x - 1) \,.\, (x + 3) \\ y + 2 = x \,.\, (x + 1) \end{cases}$

DinámicaMente

Hallen "m" y "n" sabiendo que la solución del sistema es S = {(1;1)}.

$\begin{cases} y - 2x = m + n \\ my - nx = -7x^2 \end{cases}$

20. Sistemas de ecuaciones mixtos

46. Planteen y resuelvan los siguientes problemas.

a. La suma de dos números naturales distintos es igual a 20, y el producto entre uno de ellos por su consecutivo es igual al doble del otro número. ¿Cuáles son los números?

b. Calculen el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro es igual a 32 cm, y que la medida de la base del rectángulo es igual al cuadrado de la altura, disminuido en 40.

c. El doble de la diferencia entre dos números enteros es igual a 16, y el mayor de ellos es igual al cuadrado del consecutivo del menor, disminuido en 5 unidades. Hallen los números.

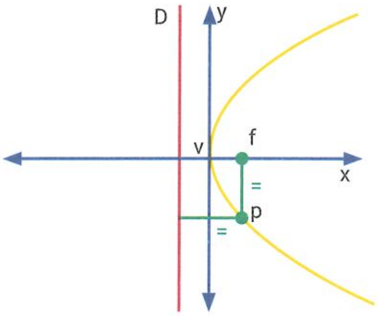
d. En un triángulo rectángulo, el cateto mayor es igual al cuadrado del cateto menor, disminuido en 5 unidades. Hallen la medida de los catetos sabiendo que la hipotenusa mide 5 cm y que el perímetro del triángulo es igual a 12 cm.

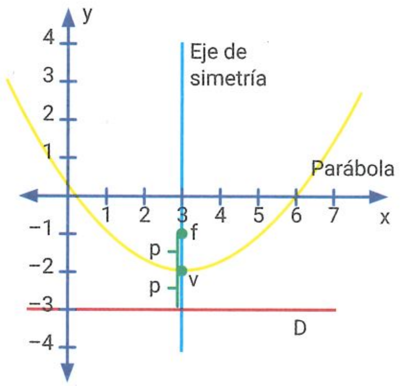
21. La parábola como lugar geométrico

▶ SABERES DINÁMICOS

Algunas ecuaciones de segundo grado tienen como gráfica una parábola.

Una **parábola** es el lugar geométrico formado por los puntos (x; y) del plano cartesiano que equidistan de una recta fija llamada **directriz** y de un punto fijo llamado **foco**.
El **eje de simetría** es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
Todo punto "p" perteneciente a la parábola está a la misma distancia del foco que de la directriz.





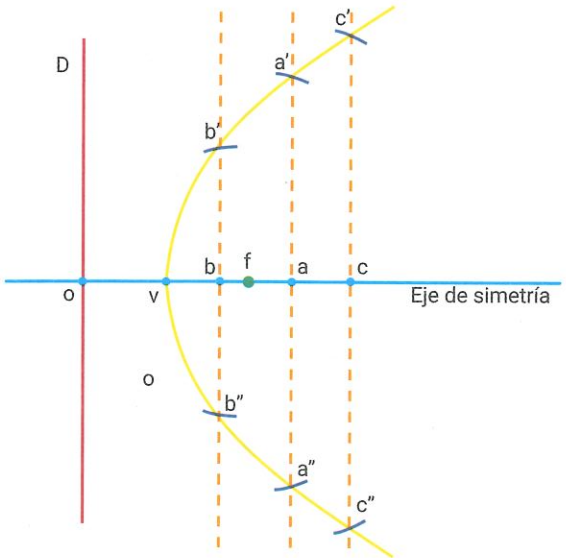
Referencias

f es el foco de la parábola.
D es la directriz de la parábola.
v es el vértice de la parábola.
El vértice se encuentra en el punto medio entre **f** y **D**.
El parámetro **p** es la distancia entre el foco y el vértice (o entre el vértice y la directriz).

Gráfico de la parábola conociendo foco y directriz

Para graficar la parábola conociendo el foco **f** y la directriz **D**, se deben realizar los siguientes pasos.

1. Se traza la recta perpendicular a la directriz **D** que pase por el foco **f** (la recta es el eje de simetría). Se nombra con la letra "o" al punto de intersección entre ambas rectas.
2. Se determina el vértice **v**, que es el punto medio entre **D** y **f**.
3. Se marca un punto "a" cualquiera sobre el eje de simetría y se traza por ese punto una recta paralela a la directriz. Se toma con el compás la medida del segmento ao y con centro en el foco **f** se traza un arco que corta esa recta paralela en dos puntos a' y a".
4. Con nuevos puntos "b" y "c" se repite el mismo trazado que el realizado con el punto "a".
5. Se unen los puntos obtenidos logrando graficar la parábola buscada.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/parab * para mirar un video donde se ve el paso a paso de la construcción de una parábola conociendo el foco y la directriz.
*Enlace acortado de https://youtu.be/KsGnbWdu8QU

ACTIVIDADES

21. La parábola como lugar geométrico

Test de comprensión

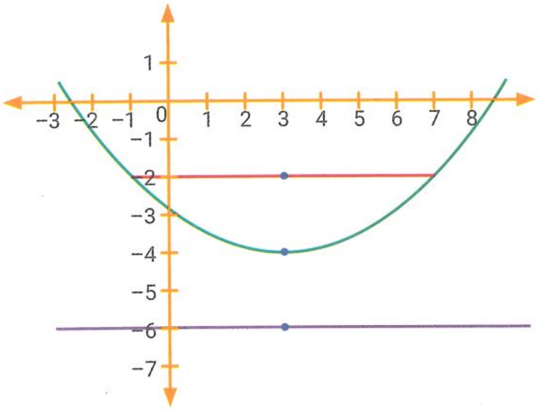
47. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que el foco está entre la directriz y el vértice de la parábola?

b. La directriz, ¿es siempre una recta vertical?

c. ¿El eje de simetría puede coincidir con la directriz?

48. Observen el gráfico, identifiquen el foco (f), el vértice (v), la directriz (D) y el eje de simetría. Si hay un elemento que no esté en el gráfico, dibújenlo. Luego, completen.



f = ____________________

v = ____________________

D = ____________________

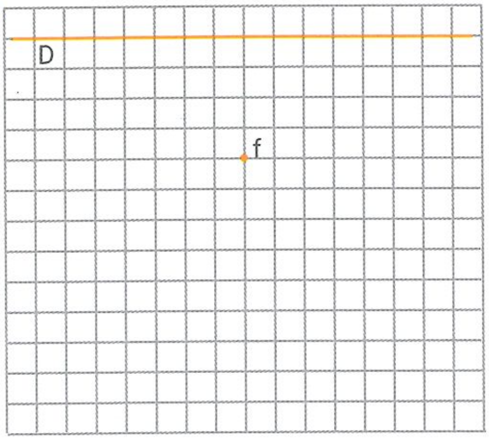
Eje de simetría = ____________________

49. Completen la tabla.

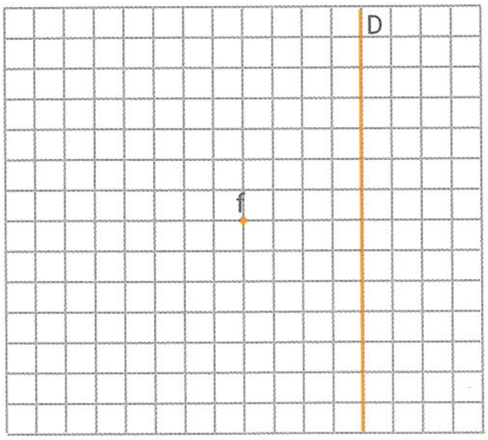
Foco	Directriz	Vértice	Eje de simetría
(0; 1)	y = −1		
(3; −1)	x = 1		
(1; 0)	y = 4		
(−2; 2)	x = 0		

50. Construyan una parábola con los datos dados en cada caso.

a.



b.



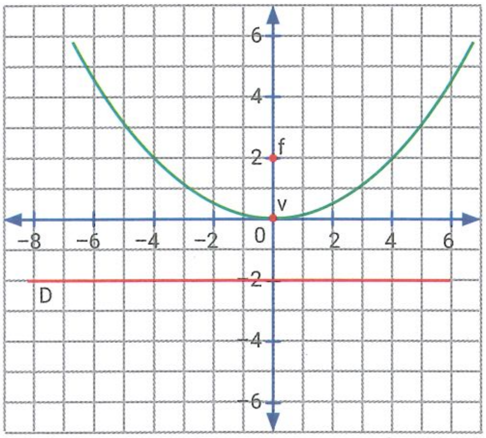
22. Ecuación de la parábola

▶ SABERES DINÁMICOS

Para determinar la **ecuación general de una parábola**, se consideran aquellas cuyo vértice es el punto v = (0; 0) y el eje de simetría coincide con algunos de los ejes de coordenadas.
Sea $P \in \mathbb{R} \wedge P \neq 0$; |P| es la distancia entre el vértice y el foco o entre el vértice y la directriz.

Vértice	Foco	Directriz	Ecuación
v = (0; 0)	f = (0; p)	y = −p	$y = \frac{x^2}{4P}$ v $x^2 = 4Py$
	f = (p; 0)	x = −p	$x = \frac{y^2}{4P}$ v $y^2 = 4Px$

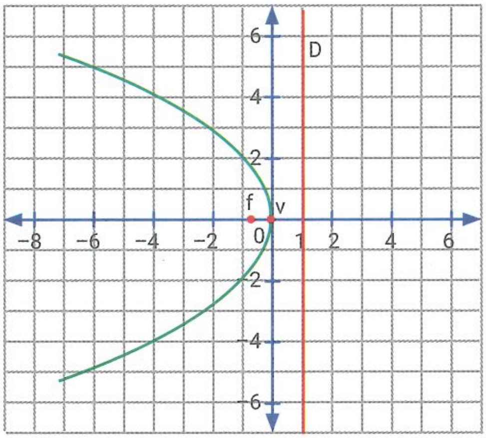
- Parábola con v = (0; 0); foco f = (0; 2); directriz D: y = −2.



|P| = 2

$y = \frac{x^2}{4 . 2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{8}$

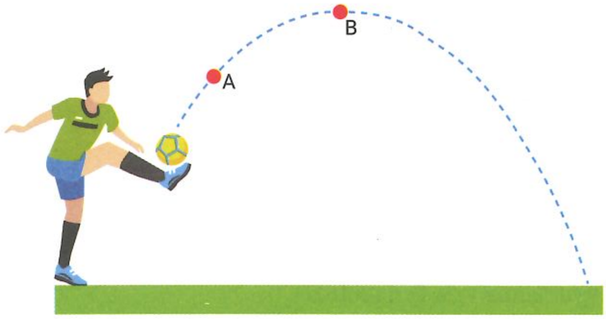
- Parábola con v = (0; 0); foco f = (−1; 0); directriz D: x = 1.



|P| = 1

$x = \frac{y^2}{4 . 1} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$

Áreas dinámicas
[Matemática, Física y el deporte]



Se denomina **movimiento parabólico** al movimiento realizado por cualquier objeto cuya trayectoria describe una parábola. Por ejemplo, cuando un jugador de fútbol patea la pelota y cae al suelo, lo hace con un movimiento parabólico.

22. Ecuación de la parábola

Test de comprensión

51. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Una parábola de ecuación $x^2 = 4py$, ¿tiene el foco en el punto (p; 0)?

b. ¿Cuál es la directriz de la parábola de ecuación $y = x^2$?

c. ¿Cuál de los ejes de coordenadas es el eje de simetría de la parábola de ecuación $x = \frac{y^2}{8}$?

52. Completen la tabla sabiendo que son parábolas de vértice v = (0; 0).

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = -12x$		
$2x = y^2$		
$10y = x^2$		
$-16y = x^2$		

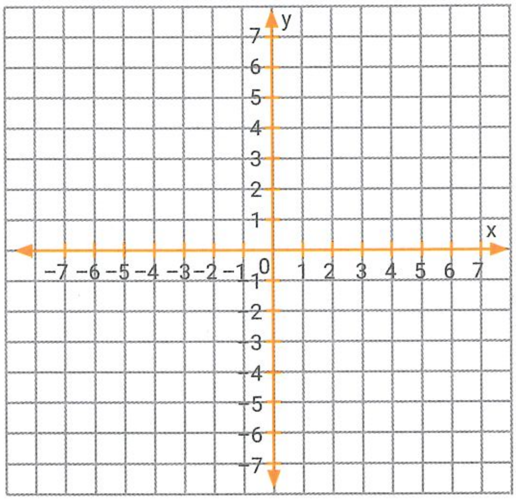
53. Realicen un gráfico aproximado de las siguientes parábolas. Luego, con un compañero, completen la tabla analizando lo pedido.

a. $y = \frac{x^2}{4}$

b. $y = \frac{x^2}{-4}$

c. $x = \frac{y^2}{4}$

d. $x = \frac{y^2}{-4}$



Eje de simetría	Signo de p	Las ramas de la parábola se dirigen hacia...

54. Escriban en cada caso la ecuación de la parábola y de la directriz.

a. f = (−2; 0) ______________________

b. f = (6; 0) ______________________

c. f = (0; 8) ______________________

d. f = (0; −2) ______________________

Integración final

55. Marquen con una X las ecuaciones que son de grado 2.

a. $(x - 1)^2 - x^2 + 1 = 8$ ☐

b. $x^2 - 3x + 9 = 2x^2$ ☐

c. $-2 . (x - 3^2) = 5 . (x + 1)$ ☐

d. $3x^2 = 0$ ☐

e. $2 - (x + 2)^2 + x^2 = 0$ ☐

f. $5x . (x - 3) = 0$ ☐

56. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. La solución de la ecuación $2x^2 - 50 = 0$ es $S = \{-5; 5\}$. ☐

b. La ecuación $x^2 + x + 7 = 0$ no tiene solución real. ☐

c. La ecuación $2x . (x - 4) = 0$ tiene por solución $S = \{2; 4\}$. ☐

d. La ecuación $3x^2 = 4 - x$ es una ecuación cuadrática completa. ☐

e. Un sistema de ecuaciones mixto está formado por dos ecuaciones lineales. ☐

f. Un sistema mixto nunca tiene una única solución. ☐

g. $x = 0$ es solución de la ecuación $x^2 = 9$. ☐

h. En la ecuación $3x - 1 = 4x^2$ resulta $a = 4$, $b = 3$ y $c = -1$. ☐

57. Resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

a. $4x^2 - 8x = 0$

b. $6x = 12x^2$

c. $-16 + x^2 = 0$

d. $27x + 9x^2 = 0$

e. $4x^2 + 4 = 0$

f. $-x^2 + 25 = 0$

58. Hallen "m" y "n" de cada ecuación usando los datos dados.

a. $mx^2 + nx - 2 = 0 \wedge S = \{-2; 1\}$

b. $2x^2 + nx = m \wedge S = \{-3; 5\}$

c. $x . (mx - 5) + n = 0 \wedge S = \{-1; 6\}$

d. $mx^2 + nx = 10 \wedge S = \{-8; 5\}$

59. Planteen y resuelvan.

a. El cuadrado del anterior de un número es igual a la diferencia entre 5 y el doble del número. ¿Qué números cumplen esta condición?

b. La suma entre el cuadrado de un número y su triple es igual a 0. ¿Cuáles son los números?

c. El cuadrado de la suma entre un número y 2 es igual a 4. ¿Cuáles son los números?

60. Resuelvan las siguientes ecuaciones y escriban la solución.

a. $x^2 - (3x - 2) = 0$

b. $x^2 = 30 - 7x$

c. $2x^2 + 50 = 0$

d. $x . (x - 2) - 15 = 0$

e. $4x + (x - 3) . x = 0$

f. $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 0$

61. Planteen y resuelvan. Para recordar pág. 81

a. En un triángulo rectángulo un cateto mide "x cm", el otro mide "x + 1 cm" y la hipotenusa mide "x + 2 cm". Hallen el perímetro del triángulo.

b. El área de un triángulo rectángulo es 24 cm^2. Hallen su perímetro sabiendo que un cateto mide 2 cm más que el otro.

62. **Planteen y resuelvan.**

a. El perímetro de un campo rectangular es de 204 m y el área es de 2 565 m^2. Encuentren las dimensiones del campo.

b. El cuadrado de la suma de dos números positivos es igual al doble de 50, y uno de ellos es igual al otro aumentado en 4 unidades. ¿Cuáles son los números?

63. **Resuelvan los siguientes sistemas mixtos.**

a. $\begin{cases} y - x + 15 = 0 \\ y + 9x = x^2 + 10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y + 3 = x \,.\, (x - 2) \\ y = -(x + 1) \,.\, (x - 3) \end{cases}$

c. $\begin{cases} y - 3x^2 + 2x = 1 \\ y + 2 = 4x \end{cases}$

d. $\begin{cases} y + 7 = x \\ y + x^2 + 5 = 0 \end{cases}$

64. **Hallen los valores de "a" y de "b" para que el sistema tenga por solución S = {(1; 3)}.**

$\begin{cases} y - x - a = 2x^2 \\ 3x = b - y \end{cases}$

¿Es la única solución?

65. **Describan los elementos de una parábola.**

66. **Marquen con una X la opción correcta.**

a. Si la directriz de una parábola con vértice en el origen es y = 5, ¿cuál es su foco?

- f = (−5; 0) ☐
- f = (0; −5) ☐
- f = (5; 0) ☐
- f = (0; 5) ☐

b. Si la directriz de una parábola con vértice en el origen es x = −3, ¿cuál es su foco?

- f = (3; 0) ☐
- f = (0; −3) ☐
- f = (−3; 0) ☐
- f = (3; 0) ☐

67. **Escriban la ecuación de cada una de las parábolas que tienen su vértice en v = (0; 0) y su foco en el punto dado.**

a. f = (2; 0)

b. f = (0; −7)

c. f = (0; 1)

d. f = (−6; 0)

68. **Marquen con una X cuál de las siguientes ecuaciones tiene por foco f = (9; 0) y directriz x = −9.**

a. $x^2 = 36y$ ☐

c. $x^2 = -36y$ ☐

b. $y^2 = 36x$ ☐

d. $y^2 = -36x$ ☐

69. **Escriban la ecuación de cada una de las parábolas que tienen su vértice en el origen de coordenadas y por directriz la recta dada.**

a. D: y = 2

b. D: x = −1

c. D: y = −0,5

d. D: x = 8

70. **Construyan el gráfico de la parábola usando los datos.**

a. f = (0; 3); D: y = −3

b. f = (−1; 0); D: x = 1

c. $f = (0; -\frac{1}{2})$; $D: y = \frac{1}{2}$

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Algunas propiedades importantes

Propiedades	Ejemplo
$\frac{x}{m} = \frac{1}{m}x$	$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$
$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$	$\frac{x \pm 1}{2} = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}$
$\frac{a \,.\, b}{c} = \frac{a}{c} \,.\, b = a \,.\, \frac{b}{c}$	$\frac{2x}{5} = \frac{2}{5}x$
$-\frac{a - b}{c} = -\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	$-\frac{x - 1}{7} = -\frac{x}{7} + \frac{1}{7}$
$(mx)^n = m^n \,.\, x^n$	$(2x)^2 = 2^2 \,.\, x^2 = 4x^2$
$(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(a - b)^2 = (a - b) \,.\, (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$	$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

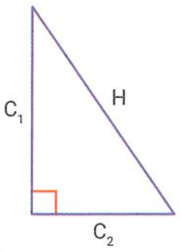
Algunas fórmulas importantes

Perímetro = suma de todos los lados

Área de un rectángulo: $Á = B \,.\, H$ (B: base; H: altura)

Área de un triángulo: $Á = \frac{1}{2} B \,.\, H$ (B: base; H: altura)

En todo triángulo rectángulo, **el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.**



$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

$$Á = \frac{1}{2} C_1 \,.\, C_2$$

Autoevaluación

Marquen la opción correcta

71. ¿Cómo se clasifica el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 5 \,.\, (x + 0{,}4y) - 11 = 0 \\ \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

◯ **a.** SCD ◯ **b.** SCI ◯ **c.** SI

72. ¿Cuál de estos sistemas de ecuaciones tiene por solución S = {(1; 4)}?

◯ **a.** $\begin{cases} 3 \,.\, (x - 1) + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

◯ **b.** $\begin{cases} (x + 1) \,.\, (x - 3) = y \\ y - x^2 = -4 \end{cases}$

◯ **c.** $\begin{cases} y + 1 = 5x \\ y - 3x = x^2 \end{cases}$

73. ¿Cuánto debe valer "m" para que el sistema resulte incompatible?

$$\begin{cases} y + mx = 9 \\ 2y = 6x - 1 \end{cases}$$

◯ **a.** $m = -3$ ◯ **b.** $m = 3$ ◯ **c.** $m = \frac{1}{3}$

74. ¿Cuánto debe valer "m" para que la ecuación $mx^2 + 2x = 1$ tenga una raíz real doble?

◯ **a.** $m = 0$ ◯ **b.** $m = -1$ ◯ **c.** $m = 1$

75. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} y + 2 = (x - 2)^2 \\ y + x^2 = 2 \,.\, (x + 1) \end{cases}$$

◯ **a.** $S = \varnothing$ ◯ **b.** $S = \{(0; 3)\}$ ◯ **c.** $S = \{(0; 2), (3; -1)\}$

76. ¿Cuál es la directriz de la parábola $y^2 = 4x$?

◯ **a.** $x = 1$ ◯ **b.** $x = -1$ ◯ **c.** $x = -4$

77. ¿Cuál es la ecuación de una parábola que tiene: v = (0; 0) y f = (0; −7)?

◯ **a.** $x^2 = \frac{y}{28}$ ◯ **b.** $28y = x^2$ ◯ **c.** $y = \frac{x^2}{-28}$

5 Polinomios

23. Polinomios. Características

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **monomio** es una expresión algebraica conformada por un coeficiente, una variable y un exponente natural.

$2x^3$ → coeficiente: −2; variable: x; exponente: 3

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de un número finito de monomios.

$P(x) = 2x - 6x^5$ $\quad$ $Q(x) = -4x + 9x^4 - 0,5$ $\quad$ $R(x) = 8x^3 - 2x^2 + x + 1$

En los **polinomios** la variable no está afectada por una raíz o como divisor, por eso se denominan también **expresiones algebraicas enteras**.

$4\sqrt{x} + 5; \frac{2x-9}{x}; x^7 - x^{-3}$ → *No son polinomios*

Grado y características de un polinomio

• El **grado de un polinomio** es el máximo exponente al que está elevado la variable.

$P(x) = 4x$ *es de grado 1* $\quad$ $Q(x) = 5$ *es de grado 0* $\quad$ $R(x) = 3x + 2x^6$ *es de grado 6*

• El **coeficiente principal** es el coeficiente del monomio de mayor exponente.

$S(x) = 5x^6 + x - 1$→ *coeficiente principal: 5* $\quad$ $Q(x) = 2x - x^4$→ *coeficiente principal: −1*

Cuando el coeficiente principal es igual a 1, se dice que está **normalizado** o es **mónico**.

$R(x) = x^6 - x + 3$ → *coeficiente principal: 1 → R(x) está normalizado*

• Para **normalizar** un polinomio se extrae como factor común el coeficiente principal.

$T(x) = 3x^3 - 6x + 9 \rightarrow T(x) = 3 . (x^3 - 2x + 3)$

• El **término independiente** es aquel que no tiene la variable.

$N(x) = 7x^3 - 6x^2 + 8$ → *término independiente; 8*

• Un **polinomio** está **ordenado** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus exponentes.

$P(x) = 4x^6 - 3x^5 + 2x - 1$ → *está ordenado de modo decreciente*

• Un **polinomio** está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado.

$H(x) = x^3 + 2x^2 - 1,2x + 8$ → *está completo* $\quad$ $M(x) = 2x^3 + 6$ → *está incompleto*

$M(x) = 2x^3 + 0x^2 + 0x + 6$ → *está completo*

Especialización de un polinomio

Cuando a la variable (o indeterminada) se le asigna un valor determinado, se dice que el polinomio está **especializado** para ese valor.

Polinomio	Valor de x	Especialización del polinomio
$P(x) = 2x^3 - 4x + 1$	$x = -1$	$P(-1) = 2 . (-1)^3 - 4 . (-1) + 1 = 3 \rightarrow P(-1) = 3$
$Q(x) = -4x + 5x^6 - 9$	$x = 0$	$Q(0) = -4 . 0 + 5 . 0^6 - 9 = -9 \rightarrow Q(0) = -9$

ACTIVIDADES

23. Polinomios. Características

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. La expresión algebraica $S(x) = x^6 + x^{-2}$, ¿es un polinomio?
   b. El polinomio $T(x) = 1 + 8x^3$, ¿está normalizado?
   c. ¿Cómo se dan cuenta cuál es el grado de un polinomio?

2. Completen la siguiente tabla.

Polinomio	Clasificación	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
$P(x) = -3x^4 + 2x$				
$Q(x) = 1 + 3x + x^5$				
$S(x) = -7$				
$R(x) = x^4 + 5 + x^2 - x^6$				
$U(x) = 6x$				

3. Escriban un ejemplo de un polinomio que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Polinomio de grado 1 completo y ordenado de modo decreciente. ______

b. Polinomio incompleto, normalizado y de grado 6. ______

c. Binomio de grado 3 y término independiente negativo. ______

d. Trinomio de grado 5 con coeficiente principal par. ______

4. Ordenen de modo decreciente y completen los siguientes polinomios.

a. $P(x) = 5 - 3x^3$

______

b. $Q(x) = -x^3 + 1 + x$

______

5. Normalicen los siguientes polinomios.

a. $P(x) = 4x^2 + 8x - 16$

______

b. $Q(x) = 5x - 2x^6$

______

6. Calculen lo pedido en cada caso.

a. $P(x) = 2x^4 - x + 6$

$P(1) =$ ______

b. $Q(x) = 3x + 2x^3$

$Q(-1) =$ ______

c. $R(x) = x^3 + \sqrt{25}$

$R(0) =$ ______

d. $S(x) = 2x + x^2 - 1$

$S\left(\frac{1}{2}\right) =$ ______

7. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. Los grados de $P(x) = 2x^5$ y $Q(x) = x + 2^5$ son iguales. ☐

b. Todos los polinomios son expresiones algebraicas enteras. ☐

24. Suma y resta de polinomios

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **monomios semejantes** a los monomios que están formados por la misma variable elevada al mismo exponente.

$6x^5$; $\frac{1}{4}x^5$ son monomios semejantes. *$7x^2$; $7x^6$ no son monomios semejantes.*

La **suma o resta de varios monomios semejantes** es otro monomio semejante al dado, cuyo coeficiente es la suma o resta de los coeficientes de los monomios dados.

$5x^3 + 8x^3 = 13x^3$ $-5x^6 + 11x^6 = 6x^6$ $-x^2 + 4x^2 - 9x^2 = -6x^2$

Reducir un polinomio es sumar o restar sus términos semejantes.

$\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4x^2 + x = -\frac{7}{2}x^2 + 4x$ $2x^4 + 5x^6 - x^6 + 3x^4 = 5x^4 + 4x^6$

Cuando se **suman o restan dos polinomios**, se deben sumar o restar los términos semejantes de los polinomios.
Existen distintas formas para resolver la suma o resta de dos polinomios.

Dados los polinomios: $P(x) = 3x^3 + 5x - 1$ $Q(x) = 7x^2 - x + 8$	Se ordenan y completan los polinomios y luego se encolumnan los términos semejantes y se resuelve la operación.	Se escribe el signo de suma o resta entre los polinomios y se suman o restan los términos semejantes (se debe prestar atención a los signos).
Suma: P(x) + Q(x)	$3x^3 + 0x^2 + 5x - 1$ $+\ 0x^3 + 7x^2 - x + 8$ $3x^3 + 7x^2 + 4x + 7$	$(3x^3 + 5x - 1) + (7x^2 - x + 8) =$ $3x^3 + 5x - 1 + 7x^2 - x + 8 =$ $3x^3 + 7x^2 + 4x + 7$
Resta: P(x) − Q(x)	$3x^3 + 0x^2 + 5x - 1$ $-\ 0x^3 + 7x^2 - x + 8$ $3x^3 - 7x^2 + 6x - 9$	$(3x^3 + 5x - 1) - (7x^2 - x + 8) =$ $3x^3 + 5x - 1 - 7x^2 + x - 8 =$ $3x^3 - 7x^2 + 6x - 9$

Para **resolver una suma algebraica de polinomios**, se opera en el orden en que aparecen las operaciones.

Dados: $A(x) = 2x^4 + x$ $B(x) = 3x^4 - x^2 + 6x$ $C(x) = -7x^4 + x - 3$

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) - C(x) &= (2x^4 + x) + (3x^4 - x^2 + 6x) - (-7x^4 + x - 3) \\ &= 2x^4 + 1x + 3x^4 - x^2 + 6x + 7x^4 - 1x + 3 \\ &= (2 + 3 + 7)x^4 - x^2 + (1 + 6 - 1)x + 3 \\ &= 12x^4 - x^2 + 6x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) + C(x) &= (2x^4 + x) - (3x^4 - x^2 + 6x) + (-7x^4 + x - 3) \\ &= 2x^4 + 1x - 3x^4 + x^2 - 6x - 7x^4 + 1x - 3 \\ &= (2 - 3 - 7)x^4 + x^2 + (1 - 6 + 1)x - 3 \\ &= -8x^4 + x^2 - 4x - 3 \end{aligned}$$

24. Suma y resta de polinomios

Test de comprensión

8. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Los monomios $5x^6$ y $5x^2$, ¿son semejantes?

b. ¿Es correcto decir que $3x + 4x^3 = 7x^4$?

c. ¿Cuál es la expresión reducida de $Q(x) = 3x^2 + x - x^3 + 5x^2 + 7x$?

9. Tengan en cuenta los siguientes polinomios y resuelvan.

$P(x) = 2x - 8x^3 + 5x^2$ $Q(x) = -2x^2 + x - 1$ $R(x) = x^4 + x^3 + 2$

a. $P(x) + Q(x) =$

b. $Q(x) - R(x) =$

c. $R(x) + Q(x) - P(x) =$

d. $P(x) - [Q(x) + R(x)] =$

10. Hallen P(x) en cada caso.

a. $4x^6 - 2x^2 + 6 + P(x) = -4x^2 + 5x^6 + 3x$

b. $5x^3 + 6x^4 - 11 = 7x + P(x) - x^4 + 5$

11. Analicen y respondan. Luego, den un ejemplo.

a. Si al sumar dos polinomios P(x) y Q(x) se obtiene un polinomio nulo, ¿cómo son los polinomios?

b. Si al restar dos polinomios P(x) y Q(x) se obtiene un polinomio nulo, ¿cómo son los polinomios?

25. Multiplicación de polinomios. Potencia

▶ SABERES DINÁMICOS

Multiplicación de polinomios

• Para **multiplicar monomios** se deben multiplicar los coeficientes entre sí aplicando la regla de los signos, y las variables entre sí aplicando las propiedades de la potenciación.

$7x^2 \cdot 4x^3 = 28x^5$ $\quad$ $3x^3 \cdot 5x^4 \cdot (-2x^2) = -30x^9$ $\quad$ $-2x^4 \cdot 2x \cdot (-4x^5) = 16x^{10}$

Cuando se multiplican monomios entre sí, el resultado es un monomio.

• Para **multiplicar un monomio por un polinomio**, se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios.

$3x^2 \cdot (-4x^3 + 5x - 1) = 3x^2 \cdot (-4x^3) + 3x^2 \cdot 5x + 3x^2 \cdot (-1) = -12x^5 + 15x^3 - 3x^2$

• Para **multiplicar dos polinomios**, se multiplica cada uno de los monomios de un polinomio por cada uno de los monomios del otro polinomio, y luego se reduce la expresión.

Dados: $\quad P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x$ $\quad Q(X) = -3x^3 + 2$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^4 - x^3 + 2x) \cdot (-3x^3 + 2) \\ &= 2x^4 \cdot (-3x^3) + 2x^4 \cdot 2 + (-x^3) \cdot (-3x^3) + (-x^3) \cdot 2 + 2x \cdot (-3x^3) + 2x \cdot 2 \\ &= -6x^7 + 4x^4 + 3x^6 - 2x^3 - 6x^4 + 4x \\ &= -6x^7 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^3 + 4x \end{aligned}$$

Potencia de un monomio

Calcular la **potencia de un monomio** es elevar al exponente tanto el coeficiente como la variable, aplicando las propiedades de la potenciación.

$(2x^2)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^6$ $\quad$ $(-x^4)^2 = (-1)^2 \cdot (x^4)^2 = x^8$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}x^2\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (x^2)^5 = \frac{1}{32}x^{10}$

Cuadrado y cubo de un binomio

Para resolver un **cuadrado** o un **cubo de un binomio** sin la fórmula, se deben resolver multiplicaciones de polinomios y, muchas veces, potencias de un monomio.

Para recordar pág. 107

$$\begin{aligned} (2x^3 + 3)^2 &= (2x^3 + 3) \cdot (2x^3 + 3) \\ &= (2x^3)^2 + 2x^3 \cdot 3 + 3 \cdot 2x^3 + 3^2 \\ &= (2x^3)^2 + 2 \cdot 2x^3 \cdot 3 + 3^2 \\ &= 4x^6 + 12x^3 + 9 \end{aligned}$$
→ *El cuadrado de un binomio da un trinomio cuadrado perfecto.*

$$\begin{aligned} (x^4 - 1)^3 &= (x^4 - 1) \cdot (x^4 - 1) \cdot (x^4 - 1) \\ &= [(x^4)^2 + x^4 \cdot (-1) + (-1) \cdot x^4 + (-1)^2] \cdot (x^4 - 1) \\ &= (x^4)^3 + (x^4)^2 \cdot (-1) + (x^4)^2 \cdot (-1) + x^4 \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot (x^4)^2 + (-1)^2 \cdot x^4 + (-1)^2 \cdot x^4 + (-1)^3 \\ &= (x^4)^3 + 3 \cdot (x^4)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 \cdot x^4 + (-1)^3 \\ &= x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1 \end{aligned}$$
→ *El cubo de un binomio da un cuatrinomio cubo perfecto.*

25. Multiplicación de polinomios. Potencia

Test de comprensión

12. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que $(-3x^4) \cdot (-2x)$ es igual a $6x^4$?

b. ¿Es cierto que $(5x^2)^2$ es igual a $5x^4$?

c. Si se multiplica un polinomio de grado 2 con un polinomio de grado 5, ¿cuál será el grado del polinomio obtenido?

13. Completen con el monomio correspondiente.

a. $7x^6 \cdot (-2x^2) =$ ☐

b. ☐ $\cdot\ 8x = 40x^5$

c. $(-x^6) \cdot (-x^7) =$ ☐

d. $(-5x^3) \cdot$ ☐ $= -x^6$

14. Resuelvan las siguientes multiplicaciones de un monomio por un polinomio.

a. $-6x^4 \cdot (-2x + 5x^3 - 1) =$

b. $(3x + 8x^5) \cdot (-2x^3) =$

c. $\frac{1}{2}x \cdot (8x^5 - 4x + 12) =$

d. $(-x^6 - x^3 - x) \cdot (-x^2) =$

15. Tengan en cuenta los polinomios y resuelvan.

$M(x) = 2x^3 - x + 2$ $N(x) = -x^2 + 5x + 1$ $P(x) = 4 + x^4$ $R(x) = 2x^4 + 3x - 5$

a. $M(x) \cdot P(x) =$

b. $R(x) \cdot N(x) =$

c. $P(x) \cdot R(x) =$

d. $M(x) \cdot N(x) =$

25. Multiplicación de polinomios. Potencia

16. Resuelvan los siguientes cuadrados y cubos de binomios.

a. $(3x - 2)^2 =$ ______

c. $(2x^2 - 3)^3 =$ ______

b. $(1 - x^4)^2 =$ ______

d. $(-x - 1)^3 =$ ______

17. Construyan un polinomio P(x) completo de grado 2 y un polinomio Q(x) normalizado, incompleto de grado 4. Luego, resuelvan P(x) . Q(x).

18. Si P(x) es de grado 4, indiquen el grado que tendrá el resultado de cada operación.

a. $P(x) \cdot P(x) =$ ______

b. $[P(x)]^3 =$ ______

19. Marquen con una X la opción correcta en cada caso. Luego, verifiquen las respuestas.

a. ¿Cuál es el resultado de $(x + 5) \cdot (x - 5)$?

- $x^2 + 25$ ☐
- $x^2 - 25$ ☐
- $x^2 + 10x - 25$ ☐
- $x^2 - 10x + 25$ ☐

b. ¿Cuál es el resultado de $(-2x^3)^2$?

- $-2x^5$ ☐
- $4x^5$ ☐
- $4x^6$ ☐
- $-2x^6$ ☐

c. ¿Cuál es el desarrollo de $(x^2 - x^5)^2$?

- $x^4 - x^{10}$ ☐
- $x^4 + 2x^7 + x^{10}$ ☐
- $x^4 + x^{10}$ ☐
- $x^4 - 2x^7 + x^{10}$ ☐

d. ¿Cuál es el grado del polinomio que resulta de $-4x^2 \cdot (-x^2 + 2x^3)$?

- 5 ☐
- 2 ☐
- 7 ☐
- 6 ☐

25. Multiplicación de polinomios. Potencia

20. **Encuentren el binomio a partir del trinomio cuadrado perfecto o del cuatrinomio cubo perfecto.**

a. $25x^{12} + 10x^8 + x^4 =$

b. $\frac{1}{4} - 2x + 4x^2 =$

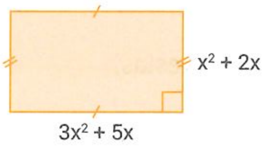
c. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 =$

d. $x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1 =$

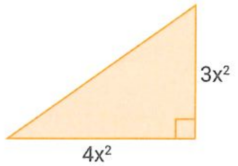
21. **Escriban la expresión reducida del perímetro y del área de cada figura.**

Para recordar pág. 107

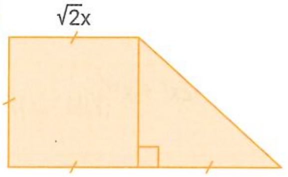
a.



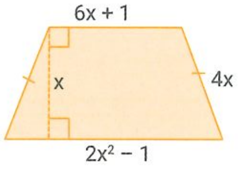
b.



c.



d.



Integración

22. Marquen con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.

a. $x^{-2} + 2x$ ☐

b. $\sqrt{5}x - 3x^5 + 1$ ☐

c. $2\sqrt{x} + x$ ☐

d. $-0{,}2x^4 + x^3 - x$ ☐

23. Escriban el grado, el coeficiente principal y el término independiente de cada polinomio.

a. $P(x) = 4x^7 + 3x^8 - 9$

b. $Q(x) = 1 - 2x$

c. $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4$

d. $S(X) = -x^6 - x^2 + 8x$

e. $T(x) = 6 + x^2$

24. Escriban un polinomio que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Completo, normalizado y de grado 3.

b. Incompleto, de grado 7 y con término independiente negativo.

c. Completo, con coeficiente principal 9 y de grado 2.

d. Incompleto, de grado 5 y con coeficientes negativos.

25. Normalicen estos polinomios.

a. $2x^6 + 8x - 4 =$

b. $5x + 10x^3 + 15x^2 =$

c. $-x^4 + x^2 - 8 =$

d. $2 + \frac{1}{2}x^6 - 8x^4 =$

26. Completen y ordenen de modo decreciente los siguientes polinomios.

a. $3x + 5 - 6x^3 =$

b. $1 - x^5 =$

27. Tengan en cuenta los polinomios dados y resuelvan las operaciones.

$P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 6$

$Q(x) = x^2 - x$

$R(X) = 2x^3 - x^4$

a. $P(x) + Q(x) =$

b. $R(x) - Q(x) =$

c. $2 \,.\, P(x) + R(x) =$

d. $-Q(x) - P(x) =$

28. Completen con los monomios correspondientes para que se verifiquen las igualdades.

a. $5x^2 \,.$ ☐ $= -10x^9$

b. ☐ $.\, (-x) = 6x^2$

c. $2x^4 \,.\, (-x^3) =$ ☐

d. $\frac{2}{3}x^3 \,.$ ☐ $= -2x^5$

29. Resuelvan.

a. $(4x - 1)^2 =$

b. $(x^3 - 1) \,.\, (x^3 + 1) =$

c. $(-x + 1)^3 =$

d. $(-2x - 6) \,.\, (6 + 2x) =$

30. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a. $\frac{1}{x}$ no es un monomio. ☐

b. $(x^3 - 2)^2 = x^6 - 4$ ☐

c. $x^2 \,.\, (-x^5) = -x^{10}$ ☐

d. El desarrollo de $(x + 1)^2$ es un cuatrinomio cubo perfecto. ☐

e. $(3x^2)^2 = 3x^4$ ☐

f. $(-5x^6)^0 = 1$ ☐

g. $x^{-1} + 5x$ es un polinomio. ☐

31. **Resuelvan las operaciones combinadas.**

a. $(x - 1) \cdot (x + 1) - (x + 1)^2 =$

b. $2x^3 + (x^2 + x) \cdot (x + 2) =$

c. $\frac{1}{2} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) - 0{,}5x^2 + x =$

d. $x - (x^4 + x^3 - 5)x + 6x^2 =$

e. $-2x^2 \cdot (-x - 3) + (x + 1) \cdot (-2) =$

f. $(3x - 1)^2 + (1 + x)^3 =$

g. $-5x \cdot (x + 2)^2 + 20x =$

h. $(-2x^2)^2 - 6x + x^4 =$

32. **Hallen "m" y completen la operación.**

a. $(mx^4 - 2x^2) \cdot (-5x^2) = 15x^6 +$ ☐

b. $(0{,}2x^5 + 5x^3) \cdot (mx^3) = 2x^8 +$ ☐

c. $(mx + 1)^2 = \frac{1}{9}x^2 +$ ☐ + ☐

d. $(mx^2 - 2)^3 = 8x^6 +$ ☐ + ☐ + ☐

33. **Propongan los polinomios que cumplan lo pedido en cada caso.**

a. Un binomio cuyo cuadrado sea de grado 6.

b. Dos polinomios que sumados den de grado 7.

c. Un monomio que elevado al cubo sea de grado 12 y coeficiente negativo.

d. Dos trinomios que restados den de grado 2.

34. **Tengan en cuenta los polinomios dados y resuelvan las operaciones.**

$P(x) = 3x + 1$ $\quad Q(x) = x^2 - 3x$

a. $[P(x) + Q(x)]^2 =$

b. $[Q(x)]^2 - [P(x)]^2 =$

c. $[P(x)]^3 + 3 \cdot Q(x) =$

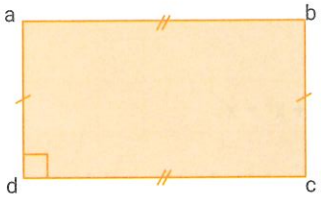
d. $P(x) \cdot Q(x) + P(x) =$

e. $5 \cdot P(x) - 2 \cdot Q(x) =$

f. $[P(x)]^2 - Q(x) =$

35. **Escriban el polinomio reducido que expresa el perímetro y el área de cada figura.** Para recordar pág. 107

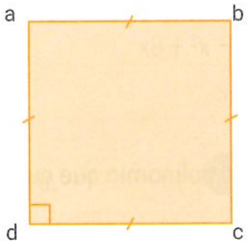
a. $\overline{ab} = 2x^3 + x$; $\overline{ad} = x^2 + 2x$



Perímetro =

Área =

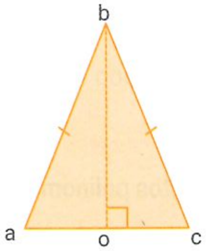
b. $\overline{ab} = x^2 - x$



Perímetro =

Área =

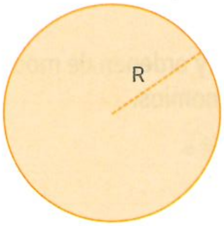
c. $\overline{ab} = 3x^4 - 6x$; $\overline{ac} = x^2 + 2x$; $\overline{bo} = \frac{2}{3}\,\overline{ab}$



Perímetro =

Área =

d. $R = 5x^2 - x$



Perímetro =

Área =

26. División de polinomios

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **dividir dos monomios** se deben dividir los coeficientes entre sí aplicando la regla de los signos, y las variables entre sí aplicando las propiedades de la potenciación.

$12x^5 : 4x^3 = 3x^2$ $\qquad$ $5x^4 . (-5x^2) = -x^2$ $\qquad$ $(-9x^2) : (-3x) = 3x$

Cuando se dividen monomios entre sí, el resultado es un monomio.

Para **dividir un polinomio por un monomio**, se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la división de monomios.

$$(15x^6 - 9x^4 + 6x^3 - 3x) : (-3x) = (15x^6) : (-3x) + (-9x^4) : (-3x) + (6x^3) : (-3x) + (-3x) : (-3x)$$
$$= -5x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1$$

Algoritmo de la división

Para **dividir dos polinomios**, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del polinomio divisor.
- El polinomio dividendo debe estar completo (o completarlo si es necesario) y ordenado en forma decreciente.
- El polinomio divisor debe estar ordenado en forma decreciente.

Dividendo ⟶ P(x) | Q(x) ⟵ Divisor
Resto ⟶ R(x) C(x) ⟵ Cociente

P(x) = C(x) . Q(x) + R(x)

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 - 10x^3 + 4x^2 - 6x + 18 & 2x^2 + 6x + 8 \\ \hline
- & 6x^4 + 18x^3 + 24x^2 & 3x^2 - 14x + 32 \\
 & -28x^3 - 20x^2 - 6x + 18 & \\
- & -28x^3 - 84x^2 - 112x & \\
 & 64x^2 + 106x + 18 & \\
- & 64x^2 + 192x + 256 & \\
 & -86x - 238 &
\end{array}$$

1.° Se divide $6x^4$ por $2x^2$ ($6x^4 : 2x^2 = 3x^2$).
2.° Se multiplica $3x^2$ por el divisor.
3.° Se resta lo obtenido al dividendo.
4.° Se repite el procedimiento hasta obtener un polinomio de grado menor que el divisor (el resto de la división).

El cociente es $C(x) = 3x^2 - 14x + 32$ y el resto es $R(x) = -86x - 238$.

Cuando al dividir un polinomio P(x) por otro Q(x) da por resto igual a cero [R(x) = 0], se dice que P(x) es divisible por Q(x).

Sean $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$; $Q(x) = x - 1$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^2 - 4x + 2 & x - 1 \\ \hline
- & 2x^2 - 2x & 2x - 2 \\
 & -2x + 2 & \\
- & -2x + 2 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$0 \longrightarrow R(x) = 0 \longrightarrow$ *Los polinomios P(x) y Q(x) son divisibles.*

26. División de polinomios

Test de comprensión

36. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que $(-15x^6 - 10x^4) : (-5x^2) = 3x^4 + 2x^2$?

b. ¿Cómo debe dar el resto de la división de dos polinomios para que sean divisibles?

c. Si el grado de P(x) es 3 y el de Q(x) es 5, ¿se puede efectuar la división P(x) : Q(x)?

37. Completen la tabla, sabiendo que P(x) y Q(x) son monomios.

P(x)	Q(x)	P(x) : Q(x)
$24x^7$	$-8x^4$	
$-5x^9$		$-x^4$
	$-6x$	$2x^6$
$8x^5$		x
$27x^6$		$3x^5$

38. Resuelvan las siguientes divisiones.

a. $(-15x^4 + 6x^3 - 9x^2) : (-3x) =$ ______

b. $\left(8x^5 + \frac{1}{2}x^3 + x^2\right) : \left(\frac{1}{4}x\right) =$ ______

c. $(-7x^6 - 5x^5 - 9x) : (-x) =$ ______

d. $(0{,}2x^2 + 5x^3 + 0{,}8x^4) : \left(-\frac{1}{5}x^2\right) =$ ______

e. $(x^8 - x^4 + x^2) : (5x) =$ ______

39. Completen la división según corresponda.

$8x^4 +$ ☐ $+$ ☐ $+ 0x + 6$ | $2x + 1$

$-$ ☐ $+$ ☐ | ☐ $- 2x^2 +$ ☐ $- 1$

$-4x^3 + 2x^2 +$ ☐ $+ 6$

$-$ $-4x^3 - 2x^2$

$4x^2 + 0x +$ ☐

$-$ $4x^2 + 2x$

$-2x + 6$

$-$ $-2x - 1$

☐

26. División de polinomios

40. Resuelvan las siguientes divisiones y completen C(x) y R(x).

a. $(4x^3 - x + 1) : (4x - 2) =$

C(x) = ______ R(x) = ______

b. $(6x^4 - 4x^2 + 4) : (x^2 + 2) =$

C(x) = ______ R(x) = ______

c. $(2x^2 + x - 3) : (-x + 1) =$

C(x) = ______ R(x) = ______

41. Indiquen si los polinomios T(x) y S(x) son divisibles en cada caso.

a. $T(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$S(x) = x + 1$

b. $T(x) = 2x^4 + 4x - 8$
$S(x) = 2x - 1$

c. $T(x) = 5x^2 + 5x - 10$
$S(x) = x + 2$

26. División de polinomios

42. Planteen y resuelvan.

a. Lucas tiene una caja de base cuadrada cuyo lado (L) mide (2x + 1) cm. El volumen (V) de la caja es $(4x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x)$ cm^3. Hallen la expresión de su altura (H).

b. La expresión del área de un trapecio isósceles (Á) es $5x^4 + 2{,}5x^3 + 12{,}5x^2$. Hallen la expresión de la altura del trapecio (H), sabiendo que la base mayor (B) del trapecio es igual a $(2x^3 + 4x)$ cm y la base menor (b) es igual a $(x^2 + x)$ cm.

43. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. El resultado de P(x) : P(x) = 0 ☐

b. La división de dos monomios puede dar como resultado un polinomio. ☐

c. Cuando se dividen un monomio de grado 9 por un monomio de grado 4, el resultado es un monomio de grado 5. ☐

d. Nunca la división de dos polinomios puede dar resto 0. ☐

e. Cuando se dividen dos polinomios divisibles, el resto de la división es 0. ☐

f. Se puede dividir un polinomio dividendo de grado 2 por un polinomio divisor de grado 7. ☐

27. La regla de Ruffini. Teorema del resto

▶ SABERES DINÁMICOS

Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método práctico para dividir un polinomio cualquiera por un binomio mónico de grado uno, es decir, por un binomio de la forma "x + a".

Sean $P(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2x - 1$ y $Q(x) = x + 1$ se halla $P(x) : Q(x)$ usando la regla de Ruffini.

Coeficientes de P(x) completo y ordenado. →

Se escribe el opuesto del término independiente del divisor (−1) y se baja el primer coeficiente (4).

Se multiplica el primer coeficiente bajado (4) por el valor puesto en (−1). Se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente y se suman. Se repite el procedimiento con los siguientes coeficientes hasta terminar.

	4	0	2	−2	−1
−1	↓	+ −4	4	−6	8
	4	−4	6	−8	7

$4x^3 - 4x^2 + 6x - 8$: Cociente — 7: Resto

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto de la división. El polinomio cociente siempre es un grado menor que el polinomio dividendo.

$C(x) = 4x^3 - 4x^2 + 6x - 8$ $\quad$ $R(x) = 7$

Sean $P(x) = 3x^3 - 5$ y $Q(x) = x - 2$ se halla $P(x) : Q(x)$ usando la regla de Ruffini.

	3	0	0	−5
2	↓	+ 6	12	24
	3	6	12	19

Opuesto del término independiente del divisor: 2.

Coeficientes del dividendo completo y ordenado: 3, 0, 0, −5.

Coeficientes del cociente: 3, 6, 12.

Resto: 19.

$C(x) = 3x^2 + 6x + 12$ $\quad$ $R(x) = 19$

Teorema del resto

El resto de una división de un polinomio por otro de la forma "x + a" es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto del término independiente del divisor.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/tdr * para mirar un video donde se explica la utilización del teorema del resto utilizando distintos ejemplos.

*Enlace acortado de https://youtu.be/LTDXp8okBdk

Dados $P(x) = 2x^3 - x + 6$ y $Q(x) = x - 2$, el resto de la división entre P(x) y Q(x) se obtiene calculando:

$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 + 6 = 20$ $\quad$ *El resto de la división es 20.*

ACTIVIDADES

27. La regla de Ruffini. Teorema del resto

Test de comprensión

44. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la división $(x^3 + 2x + 9) : (x^2 - 3)$ se puede resolver aplicando la regla de Ruffini?

b. ¿De qué grado es el polinomio cociente en una división en la que se puede aplicar la regla de Ruffini?

c. ¿Qué cálculo se debe hacer para hallar el resto de $P(x) : Q(x)$ con $Q(x) = x + 3$?

45. Resuelvan las divisiones, aplicando la regla de Ruffini, y escriban el cociente C(x) y el resto R(x).

a. $(-3x^4 + x^3 - 5) : (x - 1) =$

d. $(x^5 - 15x^3 + x^2 + x + 5) : (x - 3) =$

b. $(-x^3 - 1) : (x + 1) =$

e. $(2x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 4) : (x + 2) =$

c. $(4x^2 + 5x + 9) : (x - 2) =$

f. $(x^2 - 1) : (x - 4) =$

46. Calculen el resto de las divisiones, aplicando teorema del resto. Luego, indiquen cuáles polinomios son divisibles.

a. $(2x^4 + x^2 - 5x - 1) : (x - 3) =$

b. $(5x^3 + 15x^2 + 15x + 5) : (x + 1) =$

c. $(-x^3 + 2x^2 - 9) : (x - 6) =$

d. $\left(\frac{1}{4}x^2 + 5x + 9\right) : (x + 2) =$

28. Operaciones combinadas entre polinomios

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **resolver operaciones combinadas entre polinomios**, se deben tener en cuenta los mismos procedimientos y propiedades que con números reales.

1.° Se separa en términos.
2.° Se resuelven las potencias, multiplicaciones y divisiones.
3.° Se resuelven las sumas y restas.
4.° Se reduce la expresión del resultado.

Las operaciones más complejas se pueden resolver como cálculos auxiliares.

Se resuelve $Q(x) : R(x) + [P(x)]^2$ sabiendo que $P(x) = 2x - 1$; $Q(x) = 3x^4 + x^2 - 4$; $R(x) = x - 1$.

Se separa en términos

$$Q(x) : R(x) + [P(x)]^2 = (3x^4 + x^2 - 4) : (x - 1) + (2x - 1)^2$$

Se resuelve como cálculo auxiliar la división usando la regla de Ruffini.

Se resuelve como cálculo auxiliar el cuadrado del binomio.

$$= (3x^3 + 3x^2 + 4x + 4) + (4x^2 - 4x + 1)$$
$$= 3x^3 + 3x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1$$
$$Q(x) : R(x) + [P(x)]^2 = 3x^3 + 7x^2 + 5$$

Cálculos auxiliares

	3	0	1	0	−4
1	↓	+ 3	3	4	4
	3	3	4	4	0

$C(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 4$

$(2x - 1)^2 =$
$(2x)^2 + 2 . 2x . (-1) + (-1)^2$
$= 4x^2 - 4x + 1$

Se resuelve $N(x) . S(x) - M(x)$ sabiendo que $M(x) = x^2 + 3x + 1$; $N(x) = 2x - 5$; $S(x) = x^3 + 2$.

Se separa en términos

$$N(x) . S(x) - M(x) = (2x - 5) . (x^3 + 2) - (x^2 + 3x + 1)$$

Se resuelve el producto como cálculo auxiliar.

Se suprimen paréntesis.

$$= (2x^4 + 4x - 5x^3 - 10) - x^2 - 3x - 1$$
$$= 2x^4 - 5x^3 + 4x - 10 - x^2 - 3x - 1$$
$$N(x) . S(x) - M(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + x - 11$$

Cálculos auxiliares

$(2x - 5) . (x^3 + 2) =$
$2x . x^3 + 2x . 2 - 5 . x^3 - 5 . 2 =$
$2x^4 + 4x - 5x^3 - 10$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ocp* para mirar un video donde se explica con ejemplos la resolución de operaciones combinadas con polinomios.

*Enlace acortado de https://youtu.be/YYOKiG5Y9IY

ACTIVIDADES

28. Operaciones combinadas entre polinomios

Test de comprensión

47. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la expresión $(2x - x^2) . (5x) - (x - x^4)$ tiene 3 términos?

b. ¿Es correcta la igualdad $-2x . (x^2 + x) + 2x^3 = -2x^2$?

c. Escriban un ejemplo en el que el resultado de una operación combinada entre polinomios sea cero.

48. Reúnanse con un compañero y resuelvan. Luego, comparen los resultados con el resto.

a. $-4x . (x^2 + x) - (2x - 1)^2 =$

b. $(10x^3 + 25x^2) : (-5x) + (3x)^2 =$

49. Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.

a. $3x . (x^4 + 2x^3 - 1) - (x - 1) . (x + 2) =$

b. $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1) + (-2x)^2 =$

c. $(6x^5 + 12x^3 + 18x) : (-6x) + (x + 1)^2 =$

d. $(2x - 1) . (x^2 + x) - (x^3 - 1) . (x^2 + 2) =$

e. $(x - 1)^3 + (x - 2)^3 - x^2 =$

f. $(x^2 - 6x + 9) : (x - 3) - x . (2x + x^2) =$

28. Operaciones combinadas entre polinomios

50. Hallen P(x) en cada caso.

a. $(x + 1)^2 \cdot P(x) + 2x^3 = 3 \cdot (x^3 + x^2 + x) + 1$

b. $(4x^3 - x^2) \cdot (x + 1) - P(x) = (x - 3)^2 - (-x)^3$

51. Lean atentamente y marquen con una X la opción correcta.
El mayor de los lados de un cuadrilátero, cuyos lados son números consecutivos, mide (x + 6) cm.
¿Cuál es la expresión equivalente a la del perímetro del cuadrilátero?

a. $x + 18$ ☐ b. $2 \cdot (2x + 9)$ ☐ c. $4x + 6$ ☐

52. Tengan en cuenta los siguientes polinomios y resuelvan.

$M(x) = 2x^3 + x$ $N(x) = 3x - 1$ $S(x) = x - 1$ $T(x) = x^3 + 5x^2 + 1$

a. $M(x) \cdot N(x) - S(x) =$

b. $T(x) + N(x) \cdot S(x) =$

c. $[S(x)]^3 - [N(x)]^2 =$

d. $[N(x) - S(x)] \cdot M(x) =$

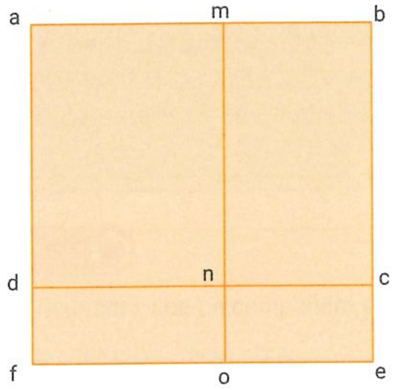
53. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. El resultado de $(2x^2 - 3) \cdot (x^2 + 2) + (x^2 + 1)^2$ es un polinomio de grado 4. ☐

b. El resultado de $(-4x^8 - 2x^4 + 8x^2) : (-2x^2) - (2x^6 + 1)$ es un polinomio de grado 6. ☐

28. Operaciones combinadas entre polinomios

54. Tengan en cuenta los datos y determinen lo pedido a partir de los datos dados.



abcd es un cuadrado.

$\overline{ab} = 4x + 1$

$\overline{mb} = 2x$

$\overline{ce} = x$

a. Expresión del perímetro y área del cuadrado abcd.

b. Expresión del perímetro del rectángulo abef.

c. Expresión del área del rectángulo amnd.

d. Expresión del área del rectángulo dnof.

55. Encuentren el valor de "a" y "b" para que se cumplan las igualdades.

a. $(2x^2 + bx) . (ax + 1) = 10x^3 + 17x^2 + 3x$

b. $(ax^2 - 7x - b) : (x + 2) = -(3x + 1)$

c. $(ax^2 + 2x)^2 : (bx)= -x^3 - 2x^2 - x$

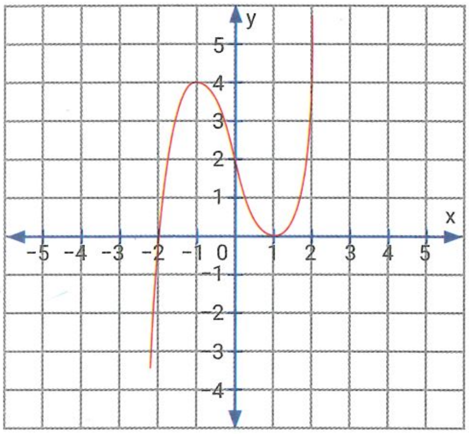
29. Introducción a la función polinómica

▶ SABERES DINÁMICOS

Existen funciones cuyas fórmulas son polinomios. Dichas funciones, reciben el nombre de **funciones polinómicas**.

$f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ $g(x) = -4x + 5$ $h(x) = x^4 - 1$ $j(x) = x^2 - 4x + 4$

- El dominio (Dm) de todas las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales. Es decir, Dm = **R**.
- Las funciones polinómicas son continuas.
- El mayor exponente al que está elevado la variable es el grado de la función.
- La función tiene por ordenada al origen f(0) el término independiente del polinomio.
- El gráfico de la función tiene contacto con el eje de las abscisas en los valores de "x" que son raíces del polinomio. Es decir que "m" es raíz de f(x), si f(m) = 0.



Dm = **R**
Es continua.
f(0) = 2
Raíces: x = −2 y x = 1

Para recordar pág. 107

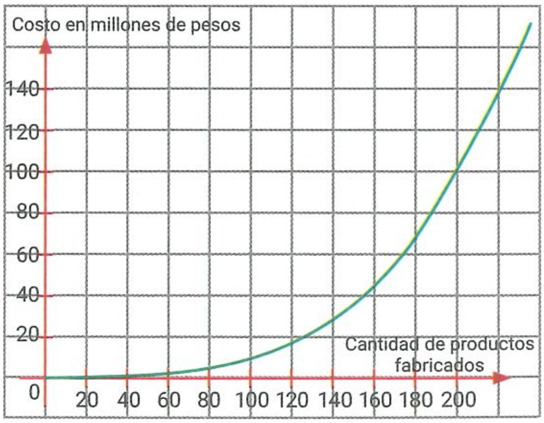
El gráfico de una función puede atravesar o rebotar en el eje x.
Esto depende del orden de multiplicidad de la raíz.

- Si el **orden de multiplicidad es impar**, la curva **atraviesa el eje x**.
- Si el **orden de multiplicidad es par**, la curva **rebota en el eje x**. Es decir, lo toca, pero no lo atraviesa.

En el ejemplo anterior, la gráfica atraviesa en x = −2, por lo tanto, esa raíz tiene multiplicidad impar.
En cambio, rebota en x = 1, por lo tanto, esa raíz tiene multiplicidad par.

Áreas dinámicas
[Matemática y la Economía]

Las funciones polinómicas se utilizan en la economía, para representar, por ejemplo, los costos o los beneficios de una empresa.
Si se llama "p" a la cantidad de los productos fabricados, la función C(p) que representa el costo según la cantidad de productos "p" fabricados puede ser: $C(p) = 12{,}5p^3 - 0{,}2p + 25$.
Por el contexto de la situación, los valores de los ejes solo pueden ser mayores o iguales a 0.
En el gráfico se observa que el costo de fabricar 200 productos será de 100 millones de pesos y a medida que aumenta la producción, el costo sube exponencialmente.



29. Introducción a la función polinómica

Test de comprensión

56. Respondan y expliquen sus respuestas.

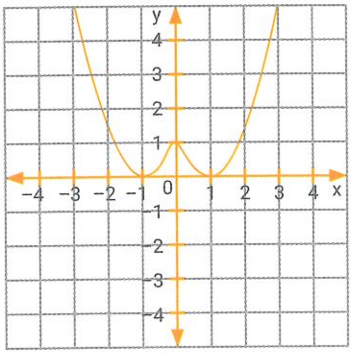
a. ¿Es cierto que todas las funciones polinómicas tienen dominio igual al conjunto de los números reales?

b. ¿Es cierto que las gráficas de las funciones polinómicas siempre tienen puntos donde atraviesan el eje x?

c. ¿Qué cálculo se debe hacer para saber si $x = 1$ es raíz de la función polinómica $f(x) = x^3 + 2x - 4$?

57. Indiquen la ordenada al origen, las raíces y si el orden de multiplicidad de las raíces es par o impar.

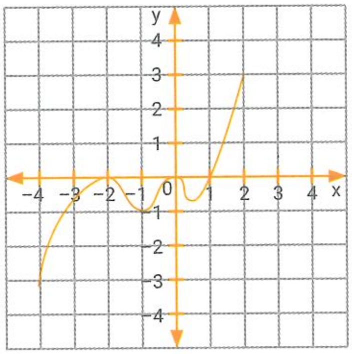
a.



f(0) = ______ Raíces = ______________________

Orden de multiplicidad = ______________________

b.

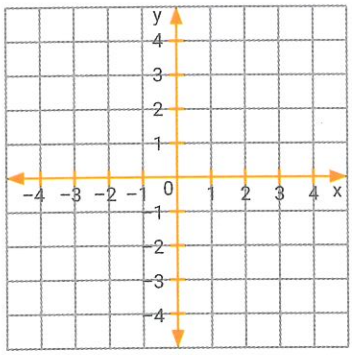


f(0) = ______ Raíces = ______________________

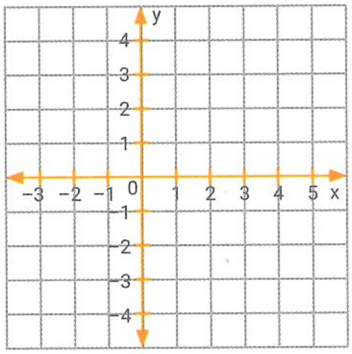
Orden de multiplicidad = ______________________

58. Realicen el gráfico aproximado de una función polinómica que cumpla lo pedido en cada caso.

a. $f(0) = 4$, $x = -3$ (raíz par); $x = 2$ (raíz impar)



b. $f(0) = -2$, $x = -1$ (raíz impar); $x = 5$ (raíz par)



59. Completen a partir de la fórmula de la función.

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^5 + 6$

Dm = ☐ ; grado: ☐ ; f(0) = ☐ ; f(1) = ☐

b. $g(x) = x^4 + 3x^3 - x$

Dm = ☐ ; grado: ☐ ; f(0) = ☐ ; f(−1) = ☐

DinámicaMente

La función $h(x) = 6x^3 - 4x^2 - 20x - 6$ es el producto de dos funciones g(x) y f(x). Respondan cada pregunta: si responden "Sí", encuentren f(x); si la respuesta es "No", expliquen por qué.

a. ¿Puede ser que una de ellas sea $g(x) = 3x + 1$?

b. ¿Puede ser que una de ellas sea $g(x) = x - 1$?

Integración final

60. **Resuelvan las siguientes divisiones. Apliquen la regla de Ruffini, cuando sea posible.**

a. $(-4x^5 - 8x^4 + 16x^2) : (-2x^2) =$

b. $(2x^3 + 5x - 2) : (x - 1) =$

c. $(4x^3 + 5x^2 + 1) : (x^2 - 2) =$

d. $(3x^2 + 6x - 9) : (3x + 3) =$

e. $(-25x^4 + 15x^2 - 10x) : (5x) =$

f. $(4x^2 + 16x + 16) : (x + 2) =$

g. $(6x^4 + 12x^3 - 6) : (2x^2 - 1) =$

h. $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x - 2) =$

61. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**

a. $(5x^2 + 10x + 5)$ es divisible por $(x + 1)$. ☐

b. El resto de la división entre los binomios $(x^2 - 4)$ y $(x + 1)$ es 0. ☐

c. La división $(8x^4 + 2x^3 + 2x^2) : (-2x)$ es exacta. ☐

d. $(6x^2 + 5x - 3)$ es divisible por el binomio $(2x + 1)$. ☐

e. La división $(x^5 - 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$ se puede resolver aplicando la regla de Ruffini. ☐

f. $(x - 2)$ es divisible por $(x + 2)$. ☐

g. La división $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x - 1)$ es exacta. ☐

h. La división $(25x^2 - 10x + 1) : (5x - 1)$ es exacta. ☐

62. **Calculen el valor de "m" para que la división sea exacta.**

a. $(2x^2 + 6x - m) : (x + 2) =$

b. $(-3x^2 - mx - 5) : (x + 1) =$

c. $(x^4 - m) : (x - 1) =$

d. $(x^3 + x + m) : (x - 2) =$

e. $(4x^2 + mx + 1) : (x - 3) =$

f. $(-x^3 + m) : (x + 3) =$

63. **Encuentren, en cada caso, el valor de "m" teniendo en cuenta el resto de P(x) : Q(x).**

P(x)	Q(x)	Resto
$x^3 + mx^2 - x - 3$	$x + 2$	7
$mx^2 + 6x - 4$	$x - 1$	-1
$2x^2 + 2$	$x - m$	4
$x^4 + 6x + 9m$	$x + 3$	0
$mx^2 - 3x - 8$	$x - 4$	12

64. **Tengan en cuenta los polinomios dados y resuelvan las operaciones.**

$P(x) = 2x^2 - x$

$Q(x) = -4x^3$

$R(x) = x - 1$

a. $[R(x)]^2 - P(x) \,.\, Q(x) =$

b. $[P(x) + Q(x)] + 2R(x) =$

c. $[Q(x) - R(x)] \,.\, P(x) =$

d. $-4P(x) + 2Q(x) + R(x) =$

e. $[R(x)]^3 - 3P(x) =$

f. $[P(x)]^2 : R(x) =$ (indicar el resto de la división)

65. **Propongan polinomios que cumplan lo pedido y resuelvan la operación para verificarlo.**

a. Dos polinomios que puedan dividirse usando la regla de Ruffini y cuya división no sea exacta.

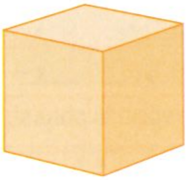
b. Dos polinomios cuyo producto sea de grado 5.

c. Dos polinomios que, al dividirlos, la división resulte exacta.

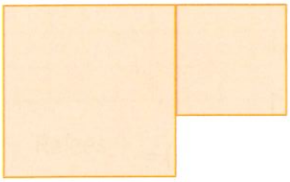
d. Dos polinomios que no se puedan dividir usando la regla de Ruffini y cuyo cociente resulte de un grado menos que el dividendo.

66. **Escriban la expresión reducida de lo pedido en cada caso.** Para recordar pág. 107

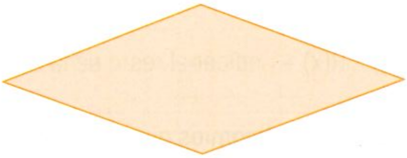
a. Volumen del cubo de arista $A = x^2 - x$.



b. Perímetro de la figura formada por dos cuadrados, el mayor de lado $L = 2x^3 + 3x^2$ y el menor de lado $l = x^2 + 5x$.



c. Área del rombo cuyas diagonales miden $D = 2x^3 + x - 2$ y $d = x^2 - 3x$.



67. **Resuelvan las operaciones combinadas.**

a. $(2x + 1)^2 - (2x^2 + 4x - 8) =$

b. $-3x^3 \,.\, (x + 1) + (x^2 - 2)^2 =$

c. $(9x^3 + 6x^2 - 12x) : (3x) - (x + 3) \,.\, (x - 3) =$

d. $(-x^4) \,.\, (-x^2) - (x^6 + 2x - x^3) + 7x =$

e. $(x + 2x^2) \,.\, (x - 2x^2) + (-2x^2)^2 + x^2 =$

f. $(x + 3) \,.\, (-x - 1) - (x + 1)^2 =$

g. $(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) : (x + 2) - (3x) =$

h. $(x + 3) \,.\, (x - 3) \,.\, (-x) + (x - 1)^2 =$

68. **Completen lo pedido para cada función polinómica.**

a. $f(x) = 3x^3 + 5x - 4$

Grado: ☐ Dm = ☐ f(0) = ☐

b. $g(x) = -x^4 + 5x$

Grado: ☐ Dm = ☐ g(0) = ☐

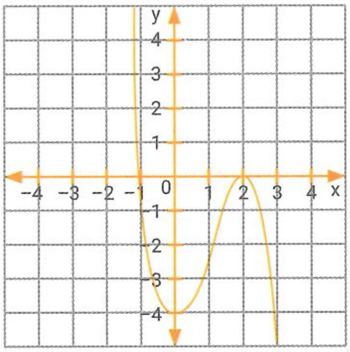
c. $h(x) = 2x^6$

Grado: ☐ Dm = ☐ h(0) = ☐

d. $j(x) = x^2 + 5x + 9$

Grado: ☐ Dm = ☐ j(0) = ☐

69. **Tengan en cuenta el gráfico y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**



a. La ordenada al origen es −4. ☐

b. Las raíces son 1 y − 2. ☐

c. El orden de multiplicidad de x = 2 es impar. ☐

d. El orden de multiplicidad de x = −1 es impar. ☐

70. **Aproximen el gráfico de una función polinómica que cumpla lo pedido en cada caso.**

a. Corta al eje de las ordenadas en 4 y tiene una raíz en x = −2 (orden de multiplicidad par) y en x = 3 (orden de multiplicidad impar).

b. Tiene tres raíces positivas con orden de multiplicidad impar y ordenada al origen negativa.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Algunas propiedades

Distributiva

$a . (b \pm c) = (b \pm c) . a = a . b \pm a . c$

$(b \pm c) : a = b : a \pm c : a$

$(a \pm b) . (c \pm d) = a . c \pm a . d \pm b . c \pm b . d$

$(a . b)^m = a^m . b^m$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Potenciación

$a^m . a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m.n}$

Cuadrado y cubo de un binomio

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}$

Trinomio cuadrado perfecto

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = \underbrace{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Cuatrinomio cubo perfecto

Algunas fórmulas

- Perímetro de una figura = suma de todos los lados.
- Perímetro de una circunferencia = π . diámetro.
- Área de un rectángulo = b . h.
- Área de un cuadrado = L^2.
- Área de un rombo con diagonales D (principal) y d = $\frac{D . d}{2}$.
- Área de un trapecio con base mayor B y base menor b = $\frac{(B + b) . h}{2}$.
- Volumen de un cubo de arista L = L^3.

Algo sobre funciones

Al graficar una función **y = f(x)** en un sistema de ejes cartesianos:

- El punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas (eje "y") recibe el nombre de **ordenada al origen**. Se cumple **f(0) = y**.
- Los puntos de intersección de la gráfica con el eje de las abscisas (eje "x") reciben el nombre de **raíces o ceros** de la función. Se cumple **f(x) = 0**.

Marquen la opción correcta

71. ¿Cuál de los siguientes polinomios de grado 3 está completo y ordenado?

a. $x^3 - 2x + x^2$ b. $2x^3 + 8x + 3$ c. $6x^2 + 5 - 7x^3$ d. $9x^3 - 2x^2 - x - 1$

72. ¿Por cuál de los siguientes binomios es divisible $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$?

a. $x - 1$ b. $x - 2$ c. $x + 2$ d. $x - 4$

73. ¿Cuál es el polinomio P(x), sabiendo que $(x^2 + 1) . P(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x$?

a. $2x^2 + x$ b. $2x^4 + x^3$ c. $2x^3 + x^2$ d. $2x^2 + 1$

74. ¿Cuál debe ser el valor de "m" para que el resto de la división $(3x^3 - 2x^2 + m) : (x - 1)$ sea 9?

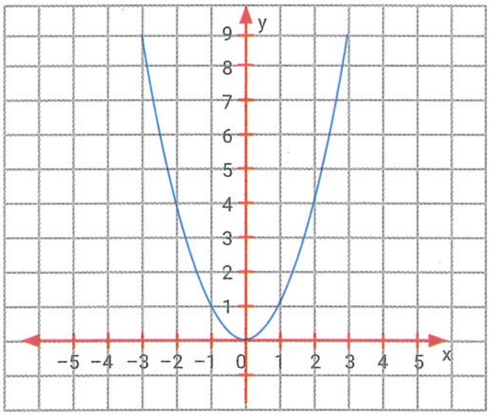
a. −8 b. 6 c. 14 d. 8

75. ¿Cuál es la expresión que indica el área de un cuadrado de lado $L = x^4 - x^2$?

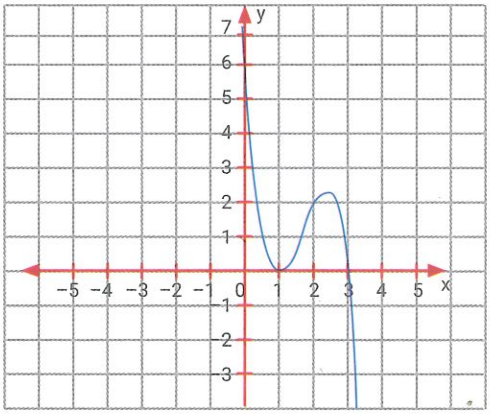
a. $x^8 - x^4$ b. $4x^4 - 4x^2$ c. $x^8 - 2x^6 + x^4$ d. $x^2 - 2x^6 - x^4$

76. ¿Cuál de los siguientes gráficos tiene todas sus raíces con orden de multiplicidad impar?

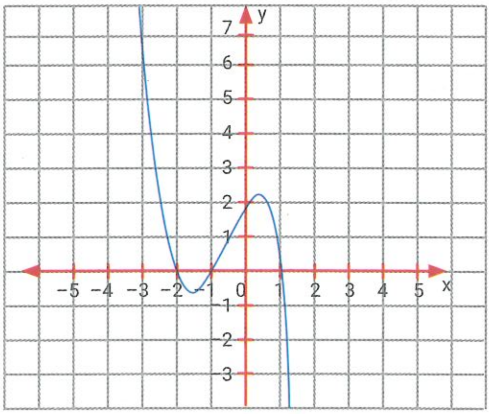
a.



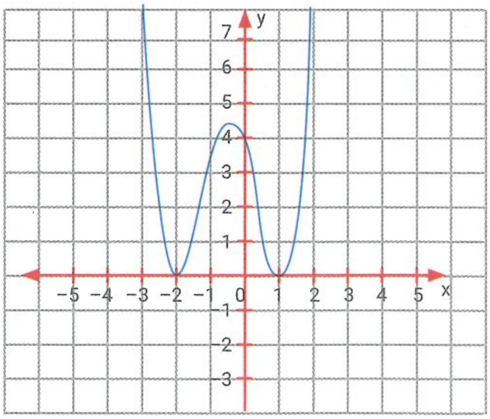
c.



b.



d.



6 Factorización. Expresiones algebraicas fraccionarias

30. Factor común y factor común por grupos

▶ SABERES DINÁMICOS

Factorear un polinomio es transformarlo en un producto de otros polinomios primos o irreducibles, que reciben el nombre de factores.
Cuando un polinomio no se puede factorizar se lo denomina **polinomio irreducible** o **primo**. Para factorizar un polinomio se pueden utilizar diferentes casos.

Factor común

Se denomina **factor común** de todos los términos de un polinomio a la expresión común en todos ellos.
Para extraer factor común se deben seguir los siguientes pasos:

Para recordar pág. 137

Paso	Ejemplo
1. Se identifica el factor presente en todos los términos del polinomio.	$P(x) = 12x^5 - 9x^3 + 15x$ $P(x) = 4 . 3x . x^4 - 3 . 3x . x^2 + 5 . 3x$
2. Se divide cada uno de los términos del polinomio por el factor común.	$\frac{12x^5}{3x} = 4x^4$ $\frac{-9x^3}{3x} = -3x^2$ $\frac{15x}{3x} = 5$
3. Se expresa el polinomio como el producto entre el factor común y, entre paréntesis, los resultados de haber dividido cada término por el factor común.	$P(x) = 3x . (4x^4 - 3x^2 + 5)$

Factor común por grupos

En algunas situaciones, cuando el polinomio no tiene un factor común a todos los términos, es posible factorizarlo aplicando **factor común por grupos**.
Siempre que los términos del polinomio puedan reunirse en grupos de igual número de términos, con un factor común en cada uno de ellos, se extrae ese factor común en cada grupo; si en cada uno de los paréntesis queda la misma expresión, se la saca a su vez como factor común, quedando así el polinomio expresado como un producto de factores comunes.

Paso	Ejemplo
1. Se forman grupos de la misma cantidad de términos de manera tal que en cada uno hay un factor común.	$S(x) = 6x^3 - 9x^2 + 14x - 21$ $S(x) = (6x^3 - 9x^2) + (14x - 21)$ $S(x) = (2 . 3x^2 . x - 3 . 3x^2) + (2 . 7 . x - 3 . 7)$
2. Se extrae el factor común de cada término, debiendo aparecer el mismo factor entre paréntesis para poder extraerlo nuevamente como factor común.	$S(x) = 3x^2 . (2x - 3) + 7 . (2x - 3)$
3. Al extraer nuevamente factor común la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.	$S(x) = (2x - 3) . (3x^2 + 7)$

ACTIVIDADES

30. Factor común y factor común por grupos

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que en un polinomio con un número impar de términos no es posible sacar factor común por grupos?
   b. Los polinomios $P(x) = 6x^5 - 3$ y $Q(x) = 6 \,.\, (x^5 - 2)$, ¿son equivalentes?
   c. Piensen una estrategia para determinar si una expresión está correctamente factorizada y confeccionen una tabla con tres ejemplos y su correspondiente verificación.

2. Extraigan factor común.

a. $12x^3 - 4x^2 + 16x^4 =$ ______

b. $-2x + 4x^2 - 8x^3 =$ ______

c. $5x^4 + 15x =$ ______

d. $ax^3 + a^2x + a^3x^2 =$ ______

e. $21x^6 + 14x^2 - 49x^3 =$ ______

f. $xy - x^2y^3 =$ ______

g. $\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^5 =$ ______

h. $ab^2x + a^2bx^4 + ab^3x^2 =$ ______

3. Completen cada expresión para que se verifique la igualdad en cada caso.

a. $5x^3 + 15x^2 - 25x =$ ☐ $. (x^2 + 3x - 5)$

b. $2x^3 + 4x^5 -$ ☐ $= 2x^2 . ($ ☐ $+ 2x^3 - 4)$

c. $\frac{5}{2}x^4 -$ ☐ $=$ ☐ $. (5x^2 - 3)$

d. $2ax^2 -$ ☐ $= 2ax . ($ ☐ $- 2a)$

e. $-4y^4 -$ ☐ $- 6y^3 = -2y^2 . ($ ☐ $+ 1 +$ ☐ $)$

f. $\frac{7}{3}x^2 +$ ☐ $- \frac{49}{3}x =$ ☐ $. (x + 2x^2 - 7)$

4. Extraigan factor común por grupos.

a. $4a + 4b + xa + xb =$ ______

b. $2x^2 + 2ax + x + a =$ ______

c. $x^3 - ax + 3x^2 - 3a =$ ______

d. $3xy - 9bx + 3x - y + 3b - 1 =$ ______

e. $4x^5 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + 7x^3 - 7 =$ ______

f. $mx + 6ay - 5m + 2ax - 10a + 3my =$ ______

5. Indiquen si el procedimiento realizado para factorizar los siguientes polinomios es correcto. En caso de no serlo, escriban la forma correcta.

a. $2x^4 - 6x^3 - 5x + 15 =$
$2x^3 . (x - 3) + 5 . (x - 3) =$
$(2x^3 + 5) . (x - 3)$

b. $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 =$
$x^2 . (x - 5) - 9 . (x - 5) =$
$(x^2 - 9) . (x - 5)$

c. $\frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x =$
$\frac{1}{4}x^3 . (3x - 1) + \frac{1}{2}x . (9x - 1) =$
$\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x\right) . (3x - 1) . (9x - 1)$

d. $3x^3 - 12x^2 + 4x =$
$12x . (4x^2 - x + 3)$

31. Trinomio cuadrado perfecto y cuatrinomio cubo perfecto

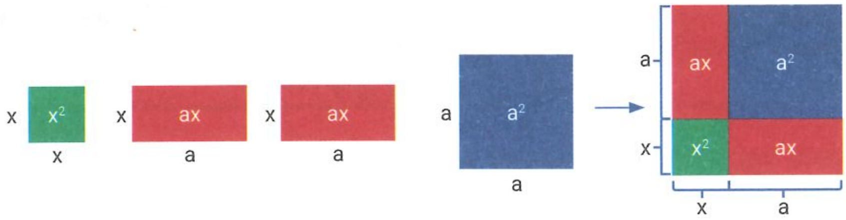
▶ SABERES DINÁMICOS

Trinomio cuadrado perfecto

Un **trinomio cuadrado perfecto** es el desarrollo del cuadrado de un binomio. Por lo tanto, el cuadrado de un binomio es la factorización del trinomio cuadrado perfecto correspondiente.

Trinomio cuadrado perfecto $\quad x^2 \pm 2 \,.\, xa + a^2 = (x \pm a)^2 \quad$ Cuadrado de un binomio

Interpretación geométrica del cuadrado de un binomio:



$$x^2 + 2 \,.\, x \,.\, a + a^2 = (x + a)^2$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/dcb* para observar una demostración geométrica del cuadrado de la diferencia de un binomio.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/Eew42yqt

$$P(x) = x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \,.\, x \,.\, 5 + 5^2 = (x + 5)^2$$

($x^2 \rightarrow x$; $25 \rightarrow 5$)

$$Q(x) = x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \,.\, x \,.\, 6 + 6^2 = (x - 6)^2$$

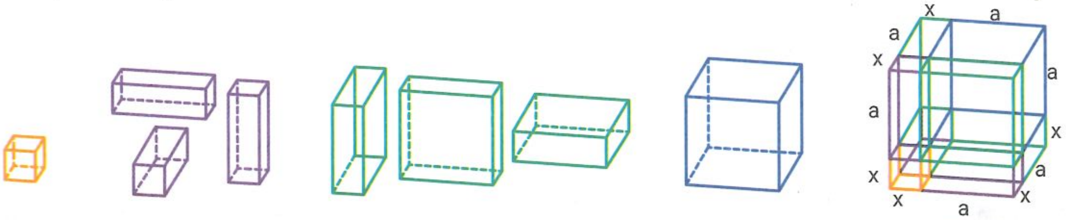
($x^2 \rightarrow x$; $36 \rightarrow 6$)

Cuatrinomio cubo perfecto

Un **cuatrinomio cubo perfecto** es el desarrollo del cubo de un binomio. Por lo tanto, el cubo de un binomio es la factorización del cuatrinomio cubo perfecto correspondiente.

Cuatrinomio cubo perfecto $\quad x^3 \pm 3 \,.\, x^2 \,.\, a + 3 \,.\, x \,.\, a^2 \pm a^3 = (x \pm a)^3 \quad$ Cubo de un binomio

Interpretación geométrica del cubo de un binomio:



$$x^3 + 3 \,.\, x^2 \,.\, a + 3 \,.\, x \,.\, a^2 + a^3 = (x + a)^3$$

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \,.\, x^2 \,.\, 2 + 3 \,.\, x \,.\, 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$$

($x^3 \rightarrow x$; $8 \rightarrow 2$)

$$Q(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = x^3 - 3 \,.\, x^2 \,.\, 3 + 3 \,.\, x \,.\, 3^2 - 3^3 = (x - 3)^3$$

($x^3 \rightarrow x$; $27 \rightarrow 3$)

ACTIVIDADES

31. Trinomio cuadrado perfecto y cuatrinomio cubo perfecto

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que las expresiones "$(x + b) . (x - b)$" y " $(x + b)^2$" son equivalentes?

b. ¿Es cierto que todo polinomio de cuatro términos con dos de ellos cubos perfectos es un cuatrinomio cubo perfecto?

c. Realicen la construcción de la interpretación geométrica del cuadrado de una resta.

7. Completen las tablas según corresponda.

a.

Trinomio	Cuadrado de binomio
$x^2 + 16x + 64$	
	$(3x - 2)^2$
$\frac{1}{16}x^2 - x + 4$	
	$(x^2 + 2x)^2$
$\frac{1}{4}x^2 - 3xy + 9y^2$	

b.

Cuatrinomio	Cubo de binomio
$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$	
$27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6$	
$\frac{1}{8} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x^2 - x^3$	
	$(x^2 + 4)^3$
$8y^3 - 12y^2x + 6yx^2 - x^3$	

8. Completen con la expresión faltante para que se cumplan las igualdades.

a. $x^2 +$ ____ $+ 36 = ($ ____ $+ 6)^2$

b. ____ $+ 20y + 25 = ($ ____ $+ 5)^2$

c. $x^2 + 6xy +$ ____ $= (x +$ ____ $)^2$

d. $16a^2 -$ ____ $+ y^2 = ($ ____ $-$ ____ $)^2$

e. $x^3 +$ ____ $+$ ____ $+ y^3 = ($ ____ $+$ ____ $)^3$

f. ____ $+ 12y +$ ____ $+ y^3 = (2 +$ ____ $)^3$

g. $x^3 -$ ____ $+ 12xa^2 -$ ____ $= ($ ____ $- 2a)^3$

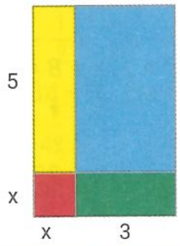
h. $27y^3 -$ ____ $+ 9y - 1 = (3y -$ ____ $)^3$

DinámicaMente

a. Escriban la expresión factorizada del área del rectángulo de la figura.

b. Marquen con una X la expresión polinómica equivalente al área.

- $x^2 + 3x + 15$ ☐
- $x^2 + 8x + 15$ ☐
- $x^2 + 8x + 3$ ☐
- $x^2 + 5x + 15$ ☐



32. Suma y resta de potencias de igual exponente. Diferencia de cuadrados

▶ SABERES DINÁMICOS

Suma y resta de potencias de igual exponente

Para factorizar polinomios de la forma $(x^n \pm a^n)$ se debe encontrar cuál binomio lo divide exactamente.

<table>
<tr><th rowspan="2">Polinomio</th><th colspan="2">Divisores</th></tr>
<tr><th>"n" impar</th><th>"n" par</th></tr>
<tr><td>Suma
$x^n + a^n$</td><td>(x + a)</td><td>No tiene divisores de la forma (x ± a).</td></tr>
<tr><td>Resta
$x^n - a^n$</td><td>(x − a)</td><td>(x − a) ∧ (x + a)</td></tr>
</table>

Para recordar pág. 137

Una vez encontrados los binomios divisores de la expresión se realiza la división aplicando la regla de Ruffini y se escribe la expresión factorizada teniendo en cuenta el cociente y el divisor correspondientes.

<table>
<tr><th>Polinomio</th><th>Divisores</th><th>Ruffini</th><th>Expresión factorizada</th></tr>
<tr><td>$P(x) = x^3 - 27$
$P(x) = x^3 - 3^3$</td><td>"n" impar y resta
(x − 3)</td><td>$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & \downarrow & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & \boxed{0} \end{array}$</td><td>$P(x) = (x - 3) \,.\, (x^2 + 3x + 9)$</td></tr>
<tr><td>$Q(x) = x^5 + 32$
$Q(x) = x^5 + 2^5$</td><td>"n" impar y suma
(x + 2)</td><td>$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ -2 & \downarrow & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & \boxed{0} \end{array}$</td><td>$Q(x) = (x + 2) \,.$
$(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$</td></tr>
<tr><td>$R(x) = x^4 - 16$
$R(x) = x^4 - 2^4$</td><td>"n" par y resta
(x + 2) ∧ (x − 2)</td><td>Se realiza la división de cada uno de los divisores.
$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ -2 & \downarrow & -2 & 4 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & \boxed{0} \\ 2 & \downarrow & 2 & 0 & 8 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$</td><td>$R(x) =$
$(x + 2) \,.\, (x - 2) \,.\, (x^2 + 4)$</td></tr>
<tr><td>$S(x) = x^2 + 4$
$S(x) = x^2 + 2^2$</td><td colspan="3">"n" par y suma
No tiene divisores de la forma (x ± a).</td></tr>
</table>

Diferencia de cuadrados

La **diferencia de cuadrados** es un caso particular del caso anterior, cuando "n" es un número par y el binomio es una resta.

Toda diferencia de cuadrados es equivalente al producto de la suma de sus bases por su diferencia. A estos factores se los denomina binomios conjugados.

Diferencia de cuadrados ← $x^2 - a^2 = (x - a) \,.\, (x + a)$ → **Binomios conjugados**

$T(x) = x^2 - 16 = (x + 4) \,.\, (x - 4)$

$x^2 \rightarrow x \qquad 16 \rightarrow 4$

$U(x) = x^6 - 9 = (x^3 + 3) \,.\, (x^3 - 3)$

$x^6 \rightarrow x^3 \qquad 9 \rightarrow 3$

32. Suma y resta de potencias de igual exponente. Diferencia de cuadrados

Test de comprensión

9. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la expresión $(x - a)^2$ es una diferencia de cuadrados?

b. ¿En qué casos es correcto decir que un polinomio de la forma $(x^n \pm a^n)$ tiene un único divisor?

c. Confeccionen una tabla de doble entrada con los diferentes casos en los que se puede factorizar polinomios de la forma $(x^n \pm a^n)$. Den ejemplos.

10. Completen la tabla según corresponda.

Polinomio	Divisores	Expresión factorizada
$x^3 - 125$		
$x^5 + 243$		
$x^7 - 128$		
$x^3 - \frac{1}{8}$		
$x^4 - 1$		
$x^6 - 64$		

11. Factoricen las diferencias de cuadrados con los binomios conjugados correspondientes.

a. $x^2 - 25 =$ ______

b. $x^6 - 4 =$ ______

c. $4x^2 - 9 =$ ______

d. $49 - x^2 =$ ______

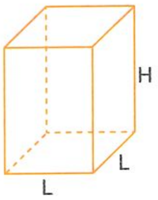
e. $y^4 - 16 =$ ______

f. $36x^{10} - 49 =$ ______

g. $m^2x^4 - 25 =$ ______

h. $100m^4 - 81x^6 =$ ______

12. Hallen la expresión factorizada del volumen de la caja de la imagen usando una diferencia de cuadrados. Tengan en cuenta que el lado L = x – 1 y que la altura H supera en dos unidades al lado L.



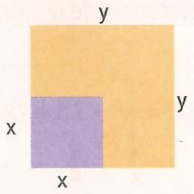
______

______

______

DinámicaMente

Reúnanse en grupos y discutan cómo expresarían el área naranja como sumas y/o diferencias de otras áreas. Verifiquen que las expresiones halladas puedan escribirse como una diferencia de cuadrados a través de su expresión como el producto de sus binomios conjugados.



33. Casos combinados de factoreo

▶ SABERES DINÁMICOS

En la factorización de algunos polinomios es necesario aplicar varias veces los distintos casos de factoreo que se han visto para lograrlo.

• Aunque no existe un único orden para aplicar los casos de factoreo, siempre es conveniente, cuando sea posible, primero extraer factor común, para luego continuar aplicando algún otro caso de factoreo.

$P(x) = x^5 + 2x^4 + x^3$ → $P(x) = x^3 \,.\, (x^2 + 2x + 1)$ → $P(x) = x^3 \,.\, (x + 1)^2$

Factor común x^3. *Trinomio cuadrado perfecto.*

$Q(x) = 4x^2 - 1$ → $Q(x) = 4 \,.\, \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$ → $Q(x) = 4 \,.\, \left(x - \frac{1}{2}\right) . \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Factor común 4. *Diferencia de cuadrados.*

• En algunos casos, es posible extraer factor común por grupos y luego analizar si los factores pueden ser factorizados aplicando otros casos de factoreo.

$R(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$
$R(x) = x \,.\, (x^2 - 9) - 5 \,.\, (x^2 - 9)$ } *Factor común por grupos.*
$R(x) = (x - 5) \,.\, (x^2 - 9)$
$R(x) = (x - 5) \,.\, (x + 3) \,.\, (x + 3)$ ← *Diferencia de cuadrados.*

$S(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x - 5$
$S(x) = 2x \,.\, (x^3 - 1) + 5 \,.\, (x^3 - 1)$ } *Factor común por grupos.*
$S(x) = (2x + 5) \,.\, (x^3 - 1)$
$S(x) = (2x + 5) \,.\, (x - 1) \,.\, (x^2 + x + 1)$ ← *Diferencia de potencias de igual base.*

$T(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
$T(x) = (x^2 - 4)^2$ ← *Trinomio cuadrado perfecto.*
$T(x) = [(x + 2) \,.\, (x - 2)]^2$ } *Diferencia de cuadrados.*
$T(x) = (x + 2)^2 \,.\, (x - 2)^2$

Áreas dinámicas [Matemática y la Economía]

La **factorización** es útil a la hora de representar funciones polinómicas que, a su vez, se utilizan en la economía; por ejemplo, para determinar las ganancias de una empresa a partir del valor de sus productos.
Si se llama "v" al precio de cada producto (en miles de pesos), la función G(v) que representa la ganancia de la empresa (en millones de pesos) según el valor de venta de cada producto puede ser: $G(v) = -v^2 + 70v - 600$.
La factorización de la función permite conocer, sin necesidad del gráfico, los casos en los que la ganancia será cero.
$G(v) = -(v - 10) \,.\, (v - 60)$ ← Cuando el costo de cada producto es \$10 000 o \$60 000 la ganancia es = 0.

33. Casos combinados de factoreo

Test de comprensión

13. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es posible lograr la misma factorización de un polinomio aplicando distintos casos de factoreo?

b. ¿Cuál es el orden de aplicación conveniente para factorizar un polinomio de los distintos casos de factoreo?

c. Realicen una tabla donde indiquen las características de cada caso de factoreo y cómo es posible identificarlos.

14. Completen con la expresión faltante según el caso de factoreo aplicado en cada uno.

a. $5x^2 - 5 =$

Factor común: ______

Dif. de cuadrados: ______

b. $4x^3 + 32 =$

Factor común: ______

S. de pot. de igual base: ______

c. $3x^3 - 18x^2 + 27x =$

Factor común: ______

Trin. cuadrado perf.: ______

d. $5x^4 + 30x^3 + 60x^2 + 40x =$

Factor común: ______

Cuatri. cubo perf.: ______

e. $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 =$

F. común por grupos: ______

Dif. de cuadrados: ______

f. $2x^4 - 32 =$

Factor común: ______

Dif. de cuadrados: ______

15. Marquen con una X la factorización correcta en cada caso.

a. $x^3 - 36x =$

- $x \,.\, (x^2 + 36)$ ☐
- $x \,.\, (x + 6)^2$ ☐
- $x \,.\, (x - 6) \,.\, (x + 6)$ ☐

b. $x^4 - 16 =$

- $(x + 2)^2 \,.\, (x - 2)^2$ ☐
- $(x^2 + 4) \,.\, (x - 2) \,.\, (x + 2)$ ☐
- $(x^2 - 4)^2$ ☐

c. $-2x^2 - 20x - 50 =$

- $-2 \,.\, (x + 5)^2$ ☐
- $2 \,.\, (x - 5)^2$ ☐
- $2 \,.\, (-x - 5)^2$ ☐

d. $x^4 - x =$

- $x \,.\, (x - 1)^3$ ☐
- $x \,.\, (x + 1) \,.\, (x^2 - x + 1)$ ☐
- $x \,.\, (x - 1) \,.\, (x^2 + x + 1)$ ☐

16. Indiquen el valor de "a" para que se verifiquen cada una de las siguientes igualdades.

a. $2x^3 - 4x^2a + 2xa^2 = 2x \,.\, (x - 1)^2$

b. $x^4 + ax^3 + 8x + 8a = (x + 2)^2 \,.\, (x^2 - 2x + 4)$

33. Casos combinados de factoreo

17. Indiquen las factorizaciones que son correctas y corrijan las incorrectas.

a. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 =$

$x^3 . (x^3 - x^2 + x - 1) =$

$x^3 . (x - 1)^3$

b. $x^3 - 8x^2 + 16x =$

$x . (x^2 - 8x + 16) =$

$x . (x - 4)^2$

c. $2x^5 - 2x^4 - 12x^3 =$

$2x^3 . (x^2 - x - 6) =$

$2x^3 . (x - 6)^2$

d. $3x^2 + 12 =$

$3 . (x^2 + 4) =$

$3 . (x + 2) . (x - 1)$

e. $x^6 - x^5 - x + 1 =$

$x^5 . (x - 1) - 1 . (x - 1) = (x^5 - 1) . (x - 1) =$

$(x - 1)^2 . (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

f. $3x^3 + x^2 - 3x - 1 =$

$3x . (x^2 - 1) + 1 . (x^2 - 1) =$

$(3x + 1) . (x - 1) . (x + 1)$

18. Completen con las expresiones correctas para que se cumpla la igualdad e indiquen el nombre del caso de factoreo aplicado.

a. $-2x^3 + 98x = -2x . (\square - \square)$ ______

$= -2x . (\square + \square) . (\square - \square)$ ______

b. $3x^3 + 6x - 9x^2 - 18 = 3 . (\square + \square - \square - \square)$ ______

$= 3 . [x^2 . (\square - \square) + 2 . (\square - \square)]$ ______

$= 3 . (x^2 + 2) . (\square - \square)$ ______

c. $-2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 = -2 . (\square - \square + \square - \square)$ ______

$= -2 . (\square - \square)^3$ ______

d. $x^4 + 5x^3 + 8x + 40 = x^3 . (\square + \square) + 8 . (\square + \square)$ ______

$= (x^3 + 8) . (\square + \square)$ ______

$= (\square + \square) . (\square - \square + \square) . (\square + \square)$

______

19. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

Polinomio	Polinomio factorizado	Casos aplicados
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 16x - 48$		
$Q(x) = 24x - 72 - 2x^2$		
$R(x) = x^6 + x^5 + x + 1$		
$S(x) = x^4 - 2x^2 + 1$		

33. Casos combinados de factoreo

20. Escriban la expresión factorizada de los siguientes polinomios.

a. $4x^5 - 16x^3 =$ ______

b. $5x^3 + 40 =$ ______

c. $3x^3 + 30x^2 + 75x =$ ______

d. $x^3 - x + 2x^2 - 2 =$ ______

e. $25x^4 - 16x^2 =$ ______

f. $\frac{2}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} =$ ______

g. $x^5 + x^4 - 16x - 16 =$ ______

h. $x^6 + 22x^4 + 121x^2 =$ ______

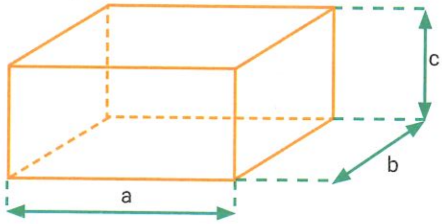
i. $2x^3 + x^2 - 2x - 1 =$ ______

j. $3x^6 + 3x^5 - 3x - 3 =$ ______

DinámicaMente

Tengan en cuenta la fórmula del volumen de una caja y resuelvan.

V = a . b. c



a. Expresen el volumen, en forma factorizada, de una caja A cuyas aristas son iguales y tienen una longitud de "x" cm.

b. Expresen el volumen, en forma factorizada, de una caja B que tiene una largo de "x" cm de longitud y tanto la altura como la profundidad miden 1 cm menos que el largo de "x" cm de longitud.

c. ¿Cuál caja tiene mayor volumen? Expliquen la respuesta mediante la expresión polinómica de cada uno de sus volúmenes.

34. Teorema de Gauss

▶ SABERES DINÁMICOS

El **teorema de Gauss** permite conocer las posibles raíces racionales de un polinomio de coeficientes enteros y término independiente no nulo, de manera tal que si el polinomio admite una raíz racional de la forma $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces "p" es divisor del término independiente y "q" lo es del coeficiente principal.

- Todo polinomio P(x) de grado "n", con "n" raíces reales puede factorizarse de la siguiente manera:

$$P(x) = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2) \,.\, (x - x_3) \,.\, \dots \,.\, (x - x_n)$$

Siendo "a" su coeficiente principal y $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ raíces reales de P(x).

- Para encontrar las posibles raíces racionales de un polinomio P(x) aplicando el teorema de Gauss y luego factorizarlo, se deben seguir estos pasos:

1. Se identifican el término independiente y el coeficiente principal.
2. Se buscan los divisores del término independiente (p) y los del coeficiente principal (q).
3. Se expresan las posibles raíces racionales de P(x) como:

   p ← **divisor del término independiente.**
   q ← **divisor del coeficiente principal.**

4. Para identificar cuál o cuáles de las posibles raíces lo son realmente, se debe especializar el polinomio P(x) en cada una de las posibles raíces racionales, teniendo en cuenta que si $x = \frac{p}{q}$ es una raíz del polinomio, se verifica que $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

Hallen las raíces de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Pasos	Ejemplo con P(x)
1. y 2.	Término independiente: 3 ⟶ divisores del término independiente: ±1; ±3. Coeficiente principal: 2 ⟶ divisores del coeficiente principal: ±1; ±2.
3.	Posibles raíces racionales: $\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}$.
4.	Se especializa el polinomio en cada una de las posibles raíces: $P(1) = 2 \,.\, 1^3 + 3 \,.\, 1^2 - 8 \,.\, 1 + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz $P(-3) = 2 \,.\, (-3)^3 + 3 \,.\, (-3)^2 - 8 \,.\, (-3) + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ es raíz $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \,.\, \frac{1}{2} + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ es raíz $P(x) = 2 \,.\, (x - 1) \,.\, (x + 3) \,.\, \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Un polinomio P(x) tiene una raíz múltiple en $x = x_1$ si al descomponerlo en función de sus raíces hay factores de la forma $(x - x_1)$ que se repiten. El orden de multiplicidad de la raíz está dado por la cantidad de veces que se repita en la factorización, es decir, el exponente al que está elevado el factor $(x - x_1)$.

Polinomio factorizado	Raíces	Multiplicidad
$P(x) = -4 \,.\, (x + 1) \,.\, (x - 2) \,.\, (x - 5)$	$x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = 5$	Tiene tres raíces simples (−1; 2 y 5).
$P(x) = (x + 1)^3$	$x_1 = x_2 = x_3 = -1$	Tiene una raíz triple (−1).
$P(x) = x^2 \,.\, (x - 4)^3$	$x_1 = 0; x_2 = 4$	Tiene una raíz doble (0) y una triple (4).
$P(x) = x^5 \,.\, (x + 8)$	$x_1 = 0; x_2 = -8$	Tiene una raíz quíntuple (0) y una simple (−8).

ACTIVIDADES

34. Teorema de Gauss

Test de comprensión

21. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cómo se reconocen el coeficiente principal y el término independiente en un polinomio?

b. ¿Es posible aplicar el teorema de Gauss en el polinomio $\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - x$?

c. ¿Qué estrategias podrían usarse cuando el polinomio tiene término independiente nulo y se lo quiere factorizar aplicando el teorema de Gauss?

22. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

Polinomio	Divisores del coeficiente principal	Divisores del término independiente	Posibles raíces
$x^3 - 7x + 6$			
$6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$			
$8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$			
$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$			

23. Hallen las raíces de los siguientes polinomios. Luego, factorícenlos e indiquen la multiplicidad de cada una de sus raíces.

a. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

b. $Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

c. $R(x) = 8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$

d. $S(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$

e. $T(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9$

f. $U(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 16x + 16$

24. Encuentren el valor de "m" según los datos en cada caso.

a. $P(x) = x^4 + x^3 + mx + 2$ se puede dividir por $(x + 2)$.

b. $Q(x) = 4x^3 - 8x^2 - 9x + m$ tiene una raíz en $x = 3$.

35. Ecuaciones de grado mayor a dos

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor a dos**, se debe igualar el polinomio P(x) que expresa la ecuación al valor numérico dado, y se plantea la ecuación:

$$P(x) = k \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Se iguala a cero la expresión anterior y se deberán encontrar las raíces de la expresión:

$$P(x) - k = 0$$

Entonces, para resolver una ecuación polinómica de grado mayor a dos, se pueden seguir los siguientes pasos:

Pasos	$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x = 12$
1. Se iguala el polinomio a cero.	$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
2. Se factoriza el polinomio resultante.	$(x + 3) . (x + 2) . (x - 2) = 0$
3. Se aplica la ley de nulidad del producto. $a . b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$	$x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$ Las raíces de $P(x) - 12 = 0$ son: $x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 2$
4. Para verificar las soluciones, se toma el valor numérico de P(x) en las raíces halladas en el paso 3 y se encuentra el valor k. $P(x_1) = k$	$P(-3) = (-3)^3 + 3 . (-3)^2 - 4 . (-3) = 12$ $P(-2) = (-2)^3 + 3 . (-2)^2 - 4 . (-2) = 12$ $P(2) = 2^3 + 3 . 2^2 - 4 . 2 = 12$
5. Se expresa el conjunto solución de la ecuación $P(x) - k = 0$.	$S = \{-3; -2; 2\}$

Encuentren los valores de "x" en cada ecuación.

$Q(x) = 3$ siendo $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x$	$R(x) = 8$ siendo $R(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$
$x^3 + 3x^2 - x = 3$ $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ $x^2 . (x + 3) - 1 . (x + 3) = 0$ $(x^2 - 1) . (x + 3) = 0$ $(x + 1) . (x - 1) . (x + 3) = 0$ $x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ $x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$ $x + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3$	$x^3 - 2x^2 + 4x = 8$ $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ $x^2 . (x - 2) + 4 . (x - 2) = 0$ $(x^2 + 4) . (x - 2) = 0$ $(x^2 + 4)$ no puede ser 0. $x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$
Verificación: $Q(-1) = (-1)^3 + 3 . (-1)^2 - (-1) = 3$ $Q(1) = 1^3 + 3 . 1^2 - 1 = 3$ $Q(-3) = (-3)^3 + 3 . (-3)^2 - (-3) = 3$	*Verificación:* $P(2) = 2^3 - 2 . 2^2 + 4 . 2 = 8$
Conjunto solución: $S = \{-3; -1; 1\}$	*Conjunto solución:* $S = \{2\}$

ACTIVIDADES

35. Ecuaciones de grado mayor a dos

Test de comprensión

25. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Si $P(x)$ tiene término independiente nulo, ¿es cierto que $x = 0$ es raíz de $P(x)$?

b. Si una solución de la ecuación $Q(x) = k$ es $x = 1$, ¿a qué es igual $Q(1)$?

c. ¿Es cierto que las soluciones de $R(x) = (x - 1) - (x + 2) = 0$ son $x = 1$ y $x = -2$?

26. Resuelvan las ecuaciones, realicen las verificaciones correspondientes en sus carpetas y escriban la solución.

Para recordar pág. 137

a. $x^3 - 3x^2 = 10x$

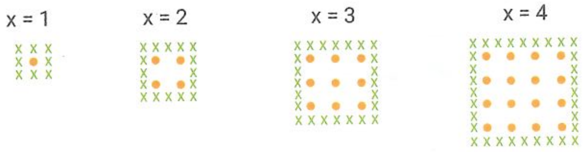
b. $x^3 - 4 = 2x^2 + 7x$

c. $x^3 \,.\, (x^2 - 4) = 4x^2 - x^4$

d. $x^6 + 2x^2 = -4$

27. Lean atentamente y resuelvan.

Un agricultor planta árboles frutales dentro de un terreno cuadrado y pinos alrededor con el objetivo de protegerlos del viento. En el esquema pueden ver la situación donde observan la colocación de los árboles frutales (círculos) y de los pinos (cruces) para distinta cantidad "x" de filas de árboles frutales.



a. Completen la tabla con la cantidad de frutales y de pinos que debe tener el terreno en cada caso.

x	1	2	3	4	5
Cantidad de árboles frutales					
Cantidad de pinos					

b. Tengan en cuenta el planteo anterior, y completen con una fórmula general para calcular el número de frutales y el de pinos teniendo en cuenta la cantidad de filas "x".

Número de frutales: ____________ Número de pinos: ____________

c. ¿Existe un número de filas para el cual el número de frutales coincide con el número de pinos? Encuentren el valor y discutan las formas que usaron para calcularlo y su validez.

28. **Unan con flechas las expresiones equivalentes.**

a. $x^2 . (x + 3)$
b. $2x . (x^2 - 1)$
c. $x^3 . (x^2 + 2x - 1)$
d. $2x^3 . (x + 1)$
e. $x^4 . (x + 2x^2 - 1)$

• $2x^4 + 2x^3$
• $x^5 + 2x^6 - x^4$
• $x^3 + 3x^2$
• $x^5 + 2x^4 - x^3$
• $2x^3 - 2x$

29. **Completen con el factor común correspondiente en cada caso.**

a. $-4 - 20x =$ ☐ $. (1 + 5x)$
b. $-25x^2 + 50x^3 =$ ☐ $. (1 - 2x)$
c. $6x^3 + 36x^4 - 12x^2 =$ ☐ $. (x^2 + 6x^3 - 2x)$
d. $-3x^5 + 81x^3 - 9x^2 =$ ☐ $. (x^3 - 27x + 3)$
e. $\frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}y^4 =$ ☐ $. (y + 3 - 5y^2)$
f. $2xy^2 + 4x^2y - 8x^3y^3 =$ ☐ $. (y + 2x - 4x^2y^2)$
g. $\frac{4}{7}x^4 + \frac{2}{7}x^3 - \frac{1}{7}x^2 =$ ☐ $. (4x^2 + 2x - 1)$

30. **Extraigan factor común por grupos.**

a. $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 =$
b. $mx^2 - 4m + x^3 - 4x =$
c. $mx - 3x + my - 3y =$
d. $x^3 - x^2 + 2x - 2 =$
e. $5ax + ay + 5bx + by =$
f. $6 - 2x^2 + 3x - x^3 =$
g. $x^3 + 4x^2 + x + 4 =$

31. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

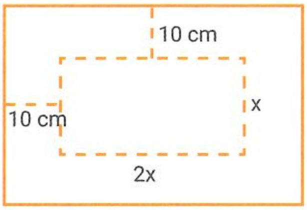
a. $(2x - 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ ☐
b. $(x + 4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$ ☐
c. $(x - 2a)^2 = x^2 - 2ax + 4a^2$ ☐
d. $(x^3 - 1)^2 = x^5 - 2x^3 + 1$ ☐
e. $(4 - 3x^2)^2 = 16 - 24x^2 + 9x^4$ ☐
f. $(2 - y^2)^2 = 4 - 4y^2 - y^4$ ☐

32. **Completen para que las expresiones sean equivalentes.**

a. $($ ☐ $- 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$
b. $(5x - 2y)^2 =$ ☐ $- 20xy +$ ☐
c. $($ ☐ $-$ ☐ $)^3 = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$
d. $($ ☐ $+ y^3)^3 = 8 + 12y^3 + 6y^6 +$ ☐
e. ☐ $- 6xya +$ ☐ $= ($ ☐ $- a)^2$
f. $(2x - m)^3 = 8x^3 -$ ☐ $+$ ☐ $- m^3$

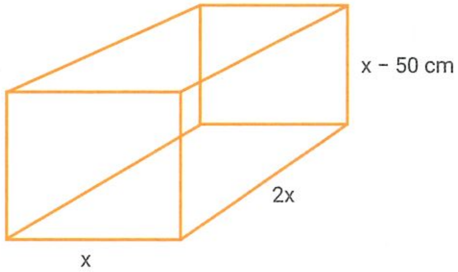
33. **Planteen cada problema y escriban la expresión más simple que represente la solución.**

a. Se deben confeccionar manteles rectangulares para unas mesas de un restaurante. Se sabe que en las mesas el largo es igual al doble del ancho. Además, alrededor de cada mantel se necesitan 10 cm de tela para el volado y el dobladillo, como se muestra en la figura.



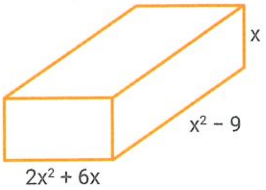
¿Cuál es la expresión que permite calcular la cantidad de tela necesaria para cada mantel en función de la medida del ancho de las mesas?

b. Una empresa fabrica contenedores de base rectangular. En cada uno de ellos el largo es igual al doble del ancho y la altura tiene 50 cm menos que el ancho como se observa en la imagen.



¿Cuál es la expresión que permite calcular el volumen de cada contenedor en función de su ancho?

34. **Escriban la expresión factorizada que indique el volumen del paralelepípedo.**



35. **Completen, cuando sea posible, la tabla con los divisores correspondientes en cada caso.**

Polinomio	Divisores
$x^3 + 8$	
$x^9 - 1$	
$x^3 - 125$	
$x^3 + \frac{1}{27}$	
$x^4 + 1$	
$x^2 - 36$	

36. **Resuelvan aplicando diferencia de cuadrados.**

a. $x^6 - 9 =$

b. $x^{10} - 16 =$

c. $25 - 4x^2 =$

d. $x^4 - 1 =$

e. $x^2 - 5 =$

f. $\frac{9}{4}y^2 - x^4 =$

37. **Hallen las posibles raíces racionales de cada polinomio y determinen cuáles de ellas lo son.**

a. $x^3 - 3x + 2$

b. $x^4 - 24x^2 - 64x - 48$

c. $-2x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 8x + 24$

d. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

e. $3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18$

f. $x^5 - 5x^4 + x - 5$

38. **Completen la tabla con lo pedido.**

Polinomio	Raíces y multiplicidad
$x^2 . (x + 1)^3 . (x - 2)$	
$x^3 . (x + 1) . (x + 2)^2$	
$(x - 1) . (x + 2) . \left(x - \frac{1}{2}\right)$	
$x . (x + 1)^2 . (x - 4)$	

39. **Factoricen e indiquen el grado de multiplicidad de las raíces de los siguientes polinomios.**

a. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

b. $x^3 + x^2 - 5x + 3$

c. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

d. $x^4 - 4x^2$

e. $-3x^3 + 12x^2 - 15x + 6$

f. $4x^7 + 6x^6 - 10x^5$

40. **Tengan en cuenta los polinomios dados y escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

$P(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$

$Q(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 8x - 12$

a. P(x) y Q(x) comparten una única raíz. ☐

b. P(x) tiene una raíz de multiplicidad doble en $x = -1$. ☐

c. Q(x) tiene todas sus raíces de multiplicidad simple. ☐

d. P(x) y Q(x) se pueden dividir ambos por $(x + 1)$. ☐

e. Q(x) tiene una raíz de multiplicidad doble en $x = \frac{3}{2}$. ☐

f. La especialización de Q(x) en $x = 2$ es igual a cero. ☐

g. P(x) presenta una raíz de multiplicidad simple en $x = \frac{1}{2}$. ☐

36. Expresiones algebraicas fraccionarias

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **expresión algebraica fraccionaria** es toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) dos polinomios.

La expresión es válida siempre que Q(x) sea distinto de 0, por ello es muy importante aclarar para qué valores de "x" será válida la expresión fraccionaria.

Expresión algebraica fraccionaria	Validez de la expresión
$\frac{8}{x-2}$	Es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{2\}$
$\frac{x+4}{x}$	Es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$\frac{x-1}{x^2-4}$	Es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
$\frac{x^2}{x^4+1}$	Es válida $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Para poder **simplificar una expresión algebraica fraccionaria** se deben factorizar el numerador y el denominador, analizar los valores en los cuales la expresión es válida y luego simplificar los factores comunes hasta llegar a una expresión equivalente a la original, pero irreducible.

Una expresión es **irreducible** cuando no existen factores comunes entre el numerador y el denominador.

- La expresión $\frac{x}{x-5}$ ⟵ es irreducible y es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{5\}$.
- La expresión $\frac{x\,.\,(x+2)\,.\,(x-1)}{x^2\,.\,(x+2)}$ ⟵ es reducible y es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-2; 0\}$.

$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)\,.\,(x+2)}$ ⟵ es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$.

$= \frac{x-1}{x+2}$ ⟵ Expresión irreducible fraccionaria y es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$.

$\frac{x^3-3x^2-6x+8}{x-4} = \frac{(x+2)\,.\,(x-1)\,.\,(x-4)}{x-4}$ ⟵ es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{4\}$.

$= (x+2)\,.\,(x-1)$ ⟵ Expresión irreducible entera y es válida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{4\}$.

36. Expresiones algebraicas fraccionarias

Test de comprensión

41. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Los valores para los cuales la expresión fraccionaria es válida ¿deben analizarse antes de realizar la simplificación?

b. ¿En qué casos una expresión algebraica fraccionaria no puede ser simplificada?

c. ¿Es cierto que si el polinomio del numerador tiene el mismo grado que el del denominador, la expresión algebraica resultante de la simplificación será entera?

42. Completen la tabla con lo pedido para cada expresión algebraica.

Expresión	¿Es algebraica fraccionaria?	¿Para qué valores de la variable es válida?
$\frac{x+2}{4}$		
$\frac{(x+3)^2}{x}$		
$(3x+6)^{-1}$		
$\frac{x^2-x-2x}{x-2}$		
$x:(x^2-1)$		
$\frac{1}{5}\cdot(x-10)^2$		

43. Simplifiquen, cuando sea posible, las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias hasta su forma irreducible. Luego, indiquen para qué valores de la variable son válidas.

a. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=$

b. $\frac{x^3+x}{x^4-1}=$

c. $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}=$

d. $\frac{x^3-3x^2-8x-10}{x^2-2x-15}=$

e. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}=$

f. $\frac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x}=$

g. $\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^4+2x^3+2x^2+10x-15}=$

h. $\frac{x^2-9}{9x-x^3}=$

37. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

▶ SABERES DINÁMICOS

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/sreaf* para mirar un video donde se explican ejemplos de suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias.

*Enlace acortado de https://youtu.be/hQ9312d53y0

Multiplicación

El resultado de **multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias** es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de las expresiones dadas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)} \quad \forall\, x / Q(x) \neq 0 \wedge S(x) \neq 0$$

$$\frac{3x-6}{5x} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \frac{3 \cdot (x-2)}{5x} \cdot \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{3 \cdot (x-3)}{5x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{-2; 0; 2\}$$

Es conveniente primero factorizar numeradores y denominadores, simplificar y luego operar.

División

El resultado de **dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias** es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera expresión por la recíproca de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)} \quad \forall\, x / Q(x) \neq 0 \wedge R(x) \neq 0 \wedge S(x) \neq 0$$

$$\frac{x^2+2x}{x^2-5x+6} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{x \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot (x-2)} : \frac{(x+2)^2}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot (x-2)} \cdot \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x}{x-3}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-2; 2; 3\}$$

Tanto en la multiplicación como en la división, se debe simplificar siempre que sea posible.

Adición y sustracción

- Si las expresiones tienen **denominadores iguales**, se suman o restan los numeradores.
- Si las expresiones tienen **denominadores distintos**, se debe obtener un denominador común, que es el mcm (mínimo común múltiplo) entre los denominadores de las expresiones. Una vez factorizados ambos denominadores, el mcm se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)+2x}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{3x-1}{(x+1) \cdot (x-1)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\frac{4}{x^2-25} - \frac{x+3}{x^2-2x-15} = \frac{4}{(x-5) \cdot (x+5)} - \frac{x+3}{(x-5) \cdot (x+3)} = \frac{4-(x+5)}{(x-5) \cdot (x+5)} = \frac{-x-1}{(x-5) \cdot (x+5)}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-5; -3; 5\}$$

Operaciones combinadas

Para **resolver operaciones combinadas con expresiones algebraicas fraccionarias** se deben seguir estos pasos.

1. Se separa en términos.
2. Se factoriza, se enuncian las condiciones de validez y se simplifica, cuando sea posible.
3. Se resuelven multiplicaciones, divisiones, sumas y restas.
4. Se halla el resultado como expresión equivalente y se reiteran las condiciones de validez.

$$\frac{x-8}{x^2-2x+1} + \frac{6x^2}{x^2-1} : \frac{x}{x+1} =$$

1. Se separa en términos.

$$\frac{x-8}{(x-1)^2} + \frac{6x^2}{(x-1) \cdot (x+1)} \cdot \frac{x+1}{x} =$$

2. Se factoriza y se escriben las condiciones: $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$.

$$\frac{x-8}{(x-1)^2} + \frac{6x}{x-1} = \frac{x-8+6x \cdot (x-1)}{(x-1)^2} =$$

3. Se resuelve la suma.

$$\frac{6x^2-5x-8}{(x-1)^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

4. Se halla el resultado.

ACTIVIDADES

37. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Test de comprensión

44. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que siempre que se opera con expresiones algebraicas fraccionarias se obtiene como resultado otra expresión fraccionaria?

b. El denominador común entre $\frac{x+3}{x^2-1}$ y $\frac{x}{(x-1)^2}$, ¿es $(x-1)$?

c. Confeccionen una tabla con los pasos que se deben seguir para resolver una operación combinada con expresiones algebraicas fraccionarias y den un ejemplo.

45. Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones, e indiquen las condiciones de validez correspondientes.

a. $\frac{4x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3-2x^2} =$ ______

b. $\frac{x^3-9x}{x-2} \cdot \frac{4x-8}{x^2+3x} =$ ______

c. $\frac{x^3-3x-2}{x^2-1} \cdot \frac{3x-3}{x^2-4x+4} =$ ______

d. $\frac{x^2-49}{2x+4} \cdot \frac{6x+12}{x^2-14x+49} =$ ______

e. $\frac{x^2-4}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+15} =$ ______

f. $\frac{x^3}{x+3} : \frac{2x}{x^2+3x} =$ ______

g. $\frac{x^2-4}{x^2+2x-3} : \frac{x^2-x-2}{x-1} =$ ______

h. $\frac{x^3+2x^2+4x}{x-3} : \frac{x^4-8x}{x^2-9} =$ ______

46. Verifiquen las igualdades realizando los cálculos correspondientes en la carpeta. Luego, indiquen si el resultado de cada operación es correcto; en caso de no serlo, corríjanlo.

a. $\frac{9x^2-25}{2x-2} \cdot \frac{x^2-1}{6x-10} = \frac{(3x+5).(x+1)}{2}$ ______

b. $\frac{5x+5}{2x-4} : \frac{x^3-x}{3x-6} = \frac{15}{2x.(x-1)}$ ______

c. $\frac{x^2-3x}{2x^2+4x+2} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-1} = \frac{x.(x-3)}{x-1}$ ______

d. $\frac{-x^2+4x}{x^2-9} : \frac{x^3-4x^2}{5x+15} = \frac{5}{x.(x-3)}$ ______

DinámicaMente

Marquen con una X el resultado correcto del siguiente cálculo combinado.

$$\left[\left(\frac{x+4}{x^2-1}\right) \cdot \left(\frac{-x+1}{x^2+1}\right)\right] : \left(\frac{-x^2-3x+1}{x^4-1}\right) =$$

- 1 ☐
- $\frac{x+4}{x-1}$ ☐
- -1 ☐
- $\frac{(x+4)^2}{x^2-1}$ ☐

47. Resuelvan las siguientes sumas y restas. Simplifiquen cuando sea posible e indiquen las condiciones de validez en cada caso.

a. $\frac{2x}{4x-1} + \frac{4x}{4x-1} =$

c. $\frac{x^3}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^2-1} =$

b. $\frac{1+2x}{x-3} - \frac{2x-1}{x-3} =$

d. $\frac{-2x^3}{x+4} + \frac{8x}{x+4} =$

48. Resuelvan las siguientes operaciones. Indiquen en cada caso las condiciones de validez.

a. $\frac{8}{x^2+2x} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x+2} =$

e. $\frac{x^2+x+1}{2x^2+x} - \frac{x^2+2}{2x^2-x-1} + \frac{2x-1}{x^2-x} =$

b. $\frac{x+1}{x^2+x} - \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2+4x+3} =$

f. $\frac{x^2-x+9}{x^3-9x} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} =$

c. $\frac{x-2}{x-3} - \frac{2x^2+x-13}{x^2+2x-15} + \frac{x+1}{x+5} =$

g. $\frac{1}{x-1} - \frac{3x+3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x+2} =$

d. $\frac{3}{2x-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{x+10}{2x^2-8} =$

h. $\frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-x-6} - \frac{15}{-3x^2+3x+18} =$

37. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

49. **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas e indiquen las condiciones de validez en cada caso.**

a. $\left(1 - \frac{x - 1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x + 3} - 1 =$

f. $\frac{x : (x - 3) - 3 : (x + 3)}{1 : (x - 3) - 1 : (x + 3)} =$

b. $\left[\frac{3x}{(x - 2)^2} - \frac{3}{x - 2}\right] . (x - 2) =$

g. $\frac{1}{x^2 - 1} \cdot \frac{3x^2 - 3x}{6} + \frac{1}{x + 1} =$

c. $\left(x - 2 - \frac{4}{x - 2}\right) : \left(x + 5 - \frac{25}{x + 5}\right) =$

h. $\frac{3x - 6}{x} - \frac{1}{x + 2} \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) =$

d. $\frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 7x^2 + 10x} + \frac{1}{x^2 + 5x} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 3x + 2} =$

i. $\frac{(x - 1) : (x + 1) - (x + 1) : (x - 1)}{(x^2 - 1) : (x^2 + 1) + (x^2 + 1) : (x^2 - 1)} : \left(x + \frac{1}{x}\right) =$

e. $\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{x^2 + 3x + 2} - \frac{1}{x + 2} =$

j. $\frac{4x + 12}{x^3 - 4x^2} - \frac{x + 3}{2x^2 - 2x - 24} =$

38. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **ecuación algebraica fraccionaria** es aquella cuya expresión es $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, siendo P(x) y Q(x) dos polinomios, tales que $Q(x) \neq 0$.

Resolver una ecuación fraccionaria implica encontrar las raíces del polinomio del numerador, es decir, P(x) que no sean simultáneamente raíces del denominador Q(x).
Por esta razón es muy importante plantear las condiciones de validez para cada ecuación, ya que si alguna de las raíces del numerador coincide con algunos de los valores excluidos en la condición de validez, deberá ser descartada como solución de la ecuación.

Una vez encontradas las soluciones de la ecuación, se deberá realizar la verificación de los valores hallados en la expresión original de la ecuación.

Ecuación	Restricción de validez	Verificación
$\frac{7}{x+1} = 2 \Rightarrow \frac{7}{x+1} - 2 = 0 \Rightarrow$ $\frac{7 - 2 \,.\, (x+1)}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{5-2x}{x+1} = 0$ $\Rightarrow 5 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$	$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{7}{2{,}5+1} = 2$ $\frac{7}{3{,}5} = 2$ $2 = 2$
$\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x^2-4} \Rightarrow$ $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ $\frac{x + 2 + 2 \,.\, (x-2) - x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ $\frac{2x-2}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$	$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$	$\frac{1}{1-2} + \frac{2}{1+2} = \frac{1}{1^2-4} \Rightarrow$ $\frac{1}{-1} + \frac{2}{3} = \frac{1}{-3} \Rightarrow$ $-1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
$\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x+5} = \frac{x^2+8x-9}{x^2+2x-15} \Rightarrow$ $\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x+5} - \frac{x^2+8x-9}{(x-3)\,.\,(x+5)} = 0 \Rightarrow$ $\frac{x \,.\, (x+5) + 4 \,.\, (x-3) - x^2 - 8x + 9}{(x-3)\,.\,(x+5)} = 0 \Rightarrow$ $\frac{x^2 + 5x + 4x - 12 - x^2 - 8x + 9}{(x-3)\,.\,(x+5)} = 0 \Rightarrow$ $\frac{x-3}{(x-3)\,.\,(x+5)} = 0 \Rightarrow$ $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ *No es solución porque 3 es una de las restricciones.*	$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-5; 3\}$	La ecuación no tiene solución, por lo tanto, no existe verificación.

ACTIVIDADES

38. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Test de comprensión

50. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es correcto decir que la ecuación $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$ se cumple para cualquier valor de x?

b. Dos ecuaciones se denominan equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución.
Las ecuaciones $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$ y $\frac{x-2}{x+2} = 0$, ¿son equivalentes? ¿Por qué?

c. Realicen una tabla con los pasos que se deben seguir para resolver una ecuación algebraica fraccionaria.

51. Resuelvan en sus carpetas y completen la tabla. Realicen las verificaciones correspondientes.

Ecuación	Restricción de validez	Solución
$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}$		
$\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-1} = 0$		
$\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2} = -\frac{4}{x+2}$		
$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$		

52. Determinen el conjunto solución de las siguientes ecuaciones. Indiquen las condiciones de validez y verifiquen las soluciones.

a. $\frac{x+5}{x-3} = 3$

b. $\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x-5}$

c. $\frac{x+2}{x-4} = \frac{x-1}{x+1}$

d. $\frac{x-5}{x+3} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x^2-3x-14}{x^2+x-6}$

e. $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+8} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6}$

f. $\frac{(x-2)^2 - x^2}{3x} = \frac{x-7}{-3x}$

DinámicaMente

Un grupo de estudiantes de 4.° año alquiló un salón por $30 000 para hacer una fiesta. Cuatro de ellos no pudieron ir a la fiesta y cada uno de los que fue debió pagar $1 250 más. ¿Cuál era la cantidad inicial de estudiantes que asistirían a la fiesta?

38. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

53. Marquen con una X la opción correcta en cada caso según lo pedido.

a. Los valores de "m" para que la solución de la ecuación $\frac{x}{x+2} - m = \frac{m}{x-1}$ sea −5.

- m = 0 ☐
- m = −2 ☐
- m = 2 ☐
- No existe "m". ☐

b. Los valores de "m" para que la solución de la ecuación $\frac{2m+x}{x-3} - \frac{x+m}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$ sea 1.

- m = 0 ☐
- m = −1 ☐
- m = 1 ☐
- No existe "m". ☐

c. Los valores de "m" para que la ecuación $\frac{3m+2x}{x+1} = \frac{x+m}{x+1}$ no tenga solución.

- m = 0 ☐
- $m = \frac{1}{2}$ ☐
- m = −1 ☐
- No existe "m". ☐

54. Planteen la ecuación y resuelvan cada problema.

a. Encuentren el valor de un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\frac{17}{4}$.

b. Hallen el valor de un número entero sabiendo que la diferencia con el inverso de su consecutivo es $\frac{11}{4}$.

c. Juan y Romina tardan 12 horas en realizar una tarea juntos. Si mantienen el mismo ritmo de trabajo, estiman que Juan estando solo tardaría 7 horas menos que si Romina lo hiciera por su cuenta. ¿Cuántas horas tardarían Juan y Romina para hacer cada uno el mismo trabajo?

55. Completen las expresiones que faltan para que se verifiquen las igualdades. Luego, indiquen si son correctas las dos soluciones y expliquen la respuesta.

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{\square \cdot \square} = \frac{x^2}{x-3}$$

$$\frac{x^2 \cdot \square - 16 - x^2 \cdot \square}{x^2 - 7x + 12} = \square$$

$$\frac{x^3 + \square - 16 - x^3 + \square}{x^2 - 7x + 12} = 0$$

$$\frac{\square - 16}{x^2 - 7x + 12} = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$\square = 4 \Rightarrow x = 4 \wedge x = -4$$

38. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

56. Resuelvan las siguientes ecuaciones e indiquen las condiciones de validez para cada una de ellas. Luego, verifiquen las respuestas.

a. $\frac{5}{x-6} = \frac{2}{x}$

b. $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-2} = 0$

c. $\frac{5x-1}{x+4} = \frac{3x+5}{x+4}$

d. $\frac{x+1}{3x} - 1 = \frac{1-x}{2}$

e. $\frac{1}{x+1} - \frac{3x}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$

f. $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1}$

g. $\frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{x+3}{4x^2-1}$

h. $\frac{1+(x+1):(x-1)}{2-(x-1):(x+1)} = 2$

i. $\frac{x-5}{x^2+4x+3} + \frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{2x^2-3x-14}{x^3+2x^2-5x-6}$

j. $\frac{3x^2-2x}{x^2-1} = \frac{4x}{x-1} - \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1}$

Integración final

57. Completen la tabla con una X según corresponda a una expresión algebraica entera o fraccionaria.

Expresión	Entera	Fraccionaria
$(x^2 - 2x)^{-1}$		
$(3x - 2) : x^{-1}$		
$(3x + 6)^{-1}$		
$6^{-1} . (x - 4) . x^2$		
$(7 - x)^{\frac{1}{2}}$		

58. Redondeen la condición de validez correspondiente a cada una de las siguientes expresiones.

a. $\frac{2x}{x^2 - 2x}$

- $x \in \mathbf{R} - \{0\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{2\}$

b. $\frac{3}{x} + (x - 7)$

- $x \in \mathbf{R} - \{0\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{7\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{0; 7\}$

c. $\frac{x - 5}{x^2 + 25}$

- $x \in \mathbf{R} - \{-5; 5\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{-5\}$
- $x \in \mathbf{R}$

d. $\frac{x - 7}{x^2 - 6x - 7}$

- $x \in \mathbf{R} - \{7\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{-1; 7\}$

e. $\frac{x^3 - 4x}{x^5 - 8x^2}$

- $x \in \mathbf{R} - \{0\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$
- $x \in \mathbf{R} - \{-2; 0; 2\}$

59. Indiquen la condición de validez para cada una de las siguientes expresiones y simplifiquen cuando sea posible.

a. $\frac{5x}{3x^2 - x} =$

b. $\frac{2x^2 - 18}{x^2 - x - 6} =$

c. $\frac{x^3 - x^2 + x}{x^4 + x} =$

d. $\frac{3x - 6}{x^2 + 3x - 10} =$

e. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6} =$

f. $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^3 - 7x + 6} =$

g. $\frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} =$

60. Completen con la expresión que falta para que se verifique la igualdad.

a. $\frac{\square}{x^2 + 2x - 15} = \frac{1}{x - 3}$

b. $\frac{\square}{3x + 2} = x - 3$

c. $\frac{x^2 - x - 20}{\square} = \frac{x + 4}{x + 1}$

d. $\frac{\square}{6x^2 + x - 15} = \frac{2x - 1}{2x - 3}$

61. Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones e indiquen las condiciones de validez en cada caso.

a. $\frac{x + 3}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + 5x + 6} =$

b. $\frac{x^3 + 1}{x^2 + x} \cdot \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x + 1} =$

c. $\frac{3 - x}{9 - x} \cdot \frac{x - 9}{x - 3} =$

d. $\frac{x^2 + 3x - 10}{4x} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6} =$

e. $\frac{2x^4 + 4x^2}{6x^2 + 14x + 4} : \frac{x^2 + 2}{3x^2 + x} =$

f. $\frac{8x^3 - 1}{4x^2 + 2x + 1} : \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} =$

g. $\frac{-16 - x^2}{x^2} : \frac{1}{x^3 + 4x^2} =$

62. Resuelvan las siguientes sumas y restas e indiquen las condiciones de validez en cada caso.

a. $\frac{3}{x+6} + \frac{x-4}{x+6} =$

b. $\frac{2x}{x-4} - \frac{x+4}{x-4} =$

c. $\frac{x^2+3x-2}{x^2+2x-15} + \frac{4x+12}{x^2+2x-15} =$

d. $\frac{x}{x-6} - \frac{x^2-4x-6}{x-6} =$

e. $\frac{x^3-12x^2+45x}{x^2-8x} - \frac{x^2+5x}{x^2-8x} =$

f. $\frac{3x^2-x}{2x^2-x-21} + \frac{2x-8}{2x^2-x-21} - \frac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21} =$

63. Resuelvan las siguientes sumas y restas e indiquen las condiciones de validez en cada caso. Simplifiquen cuando sea posible.

a. $\frac{x+2}{x-1} - 4 =$

b. $\frac{4}{x-2} + \frac{2x}{2-x} =$

c. $\frac{3x}{2x-3} + \frac{3x+6}{2x^2+x-6} =$

d. $\frac{5x}{x^2-9x+8} - \frac{3x+6}{x^2-6x-16} =$

e. $\frac{-4}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} =$

f. $\frac{2x}{x-4} - \frac{2}{x+4} + \frac{64}{x^2-16} =$

64. Completen con el polinomio faltante para que se verifique la igualdad.

a. $\frac{5x^2-6}{x^2-x-1} - \frac{\square}{x^2-x-1} = \frac{-2x^2+6x-12}{x^2-x-1}$

b. $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} - \frac{\square}{x^2-5x+6} = \frac{7}{x-2}$

65. Encuentren los valores de "a" y "b" para que se verifique la igualdad en cada caso.

a. $\frac{3x+1}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1}$

b. $\frac{2x-7}{x^2-3x-4} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+1}$

66. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. $\left(2 - \frac{6}{x+3}\right) \cdot \frac{x+3}{x-2} =$

b. $\left(\frac{5}{x-5} - \frac{2}{x+3}\right) : \frac{3x+25}{x^2-25} =$

c. $\left(\frac{x+5}{x-3} - x\right) : \frac{x-5}{x-3} =$

d. $\frac{x^2+4x-5}{2x^2+x-3} \cdot \frac{2x+3}{x+1} - \frac{2}{x+2} =$

e. $\left(\frac{x+5}{x^2-25} + \frac{1}{x+5}\right) \cdot \frac{2x^2-13x+15}{4x^2-6x} =$

f. $\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1}\right) : \frac{6}{x-1} - \frac{4x^2-3x}{6x^2} =$

67. Resuelvan las siguientes ecuaciones, indiquen las condiciones de validez en cada caso y, luego, verifiquen las soluciones obtenidas.

a. $2 - \frac{5}{2x} = \frac{2x}{x+1}$

b. $\frac{3x-2}{x+1} = 4 - \frac{x+2}{x-1}$

c. $\frac{6}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{-12x+31}{x^2+7x+12}$

d. $\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

e. $\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{x+2}{x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$

f. $\frac{x}{2x+2} + \frac{2x-16}{4x+14} = \frac{2x-3}{x+1}$

68. Planteen y resuelvan la ecuación que representa cada una de las siguientes situaciones.

a. La suma de los inversos de dos números enteros consecutivos da por resultado $\frac{11}{30}$. ¿Cuáles son esos números?

b. Cuando un número se suma al numerador y al denominador de la fracción $\frac{7}{9}$, se obtiene la fracción $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es el número que se sumó?

c. Si el triple de un número se suma al doble del inverso de ese número, se obtiene 5. ¿Cuál puede ser el número?

d. Si al doble del recíproco del cuadrado de un número se le resta el triple de su recíproco se obtiene −1. ¿Cuál puede ser el número?

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta

Para factorizar un polinomio mediante factor común se debe recordar la **propiedad distributiva de la multiplicación** respecto de la suma y de la resta (teniendo en cuenta que para extraer el factor común se debe proceder en forma inversa).

$a \,.\, (x \pm y) = a \,.\, x \pm a \,.\, y$ *a: factor que se repite en ambos términos.*

Fórmula resolvente

Para **resolver ecuaciones cuadráticas** completas se puede usar la **fórmula resolvente**:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si la ecuación cuadrática es incompleta, se puede usar reemplazando por 0 los coeficientes faltantes.

• Se pueden resolver ecuaciones cuadráticas completas de la siguiente manera.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

Se reemplazan los valores de los coeficientes en la fórmula resolvente.

$$x_1; x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, (-4)}}{2 \,.\, 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} =$$

$$x_1 = \frac{2 + 6}{4} \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{2 - 6}{4} \Rightarrow x_2 = -1$$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método práctico para dividir un polinomio cualquiera por un binomio mónico de grado uno, es decir, por un binomio de la forma "x + a".

Sean **$P(x) = 5x^4 - 2x^2 - 4x + 1$** y **$Q(x) = x - 1$ se halla $P(x) : Q(x)$ usando la regla de Ruffini**.

Coeficientes de P(x) completo y ordenado. →

Se escribe el opuesto del término independiente del divisor (1) y se baja el primer coeficiente (5).

Se multiplica el primer coeficiente bajado (5) por el 1. Se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente y se suman (0 + 5 = 5). Se repite el procedimiento con los siguientes coeficientes hasta terminar.

	5	0	−2	−4	1
1	↓	+ 5	5	3	−1
	5	5	3	−1	0

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto de la división.

Cociente = $5x^3 + 5x^2 + 3x - 1$

Resto = 0

El polinomio cociente siempre es un grado menor que el polinomio dividendo.

Autoevaluación

Marquen la opción correcta

69. ¿Cuál es la factorización del polinomio $P(x) = -x^5 - x^4 - x^3 - 3x^2 + 6x$?

○ **a.** $-x \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

○ **b.** $-x \cdot (x^2 + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

○ **c.** $x \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

○ **d.** $x \cdot (x^2 + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

70. Tengan en cuenta la expresión dada y respondan.

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{4x^2 - 9} : \frac{x^2 + 7x + 12}{2x^2 + 7x - 15}$$

a. ¿Cuál es la expresión simplificada?

○ $\frac{x + 5}{2x - 3}$ ○ $\frac{x - 5}{2x + 3}$ ○ $\frac{x + 5}{2x + 3}$ ○ Ninguna de las anteriores.

b. ¿Cuál es la condición de validez?

○ $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ ○ $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ ○ $x \in \mathbb{R} - \left\{-5; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ ○ Ninguna de las anteriores.

71. ¿Cuáles son los valores de "a" y "b" para que se verifique la igualdad?

$$\frac{-4x + 18}{x^2 + x - 6} = \frac{a}{x - 2} - \frac{b}{x + 3}$$

○ **a.** $a = 2; b = -6$ ○ **b.** $a = -2; b = 6$ ○ **c.** $a = 2; b = 6$ ○ **d.** Ninguna de las anteriores.

72. ¿Cuál es el conjunto solución de la siguiente ecuación?

$$\frac{6x^2}{3x - 9} - \frac{2x}{x^2 - 3x} - \frac{x^2}{x - 3} = \frac{7}{x - 3}$$

○ **a.** $S = \{-3; 0; 3\}$ ○ **b.** $S = \{-3; 0\}$ ○ **c.** $S = \{-3\}$ ○ **d.** $S = \varnothing$

7 Funciones

39. Funciones

▶ SABERES DINÁMICOS

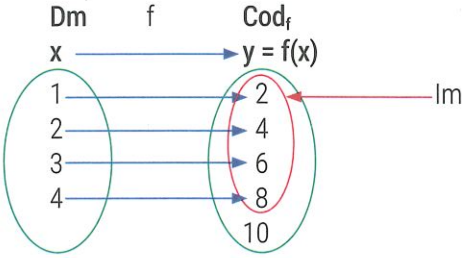
Una **función** es una **relación entre dos variables**, en la cual **a cada valor de la primera** (llamada variable independiente) **le corresponde un único valor de la segunda** (llamada variable dependiente).
En el caso de las funciones algebraicas se suele usar las letras minúsculas f, g, h, para designar las funciones.

Dominio, codominio e imagen

Para recordar pág. 181

- El **dominio de una función** (**Dm** o **D_f**) son todos los valores que toma la variable independiente.
- El **codominio de una función** (**Cod_f**) son todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- La **imagen de una función** (**Im** o **I_f**) son todos los valores que toma la variable dependiente.

El conjunto imagen es un subconjunto del codominio.



La imagen de "x" a través de la función "f" se denota con la expresión y = f(x), donde "y" es la imagen de "x" y "x" es la preimagen de "y".

Representación gráfica de las funciones

La **representación gráfica de una función** "f" está formada por todos los puntos del plano (x; y) que verifican que y = f(x).
Si y = f(x), entonces (x; y) pertenece a la gráfica de la función.

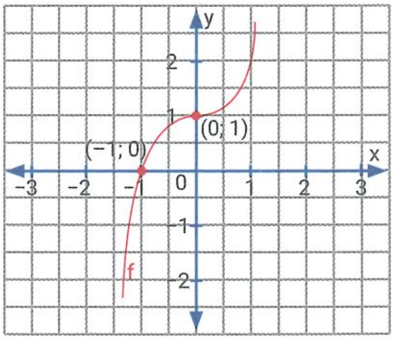
abscisa (x) — ordenada (y)

Por ejemplo, si en una función f(x) se cumple que f(2) = 9, entonces el punto de coordenadas (2; 9) pertenece a la gráfica de la función. De la misma manera, si el punto de coordenadas (1; 2) pertenece a la gráfica de la función f, entonces se cumple que f(1) = 2.

- Las **raíces** o **ceros** de una función son los puntos de intersección del gráfico con el eje x.
Son puntos de la forma (x; 0).
- La **ordenada al origen** de una función es el punto de intersección del gráfico con el eje y.
Es un punto de la forma (0; y).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^3 + 1$

x	$f(x) = x^3 + 1$
−2	−7
−1	0
0	1
1	2
2	9



Dm = $\mathbb{R}$
Codf = $\mathbb{R}$
Im = $\mathbb{R}$
Raíz: x = −1
Ordenada al origen: y = 1

ACTIVIDADES

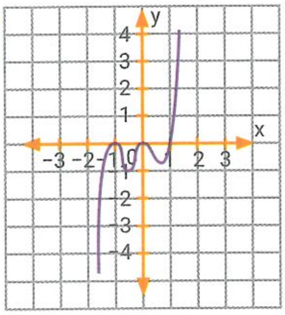
39. Funciones

Test de comprensión

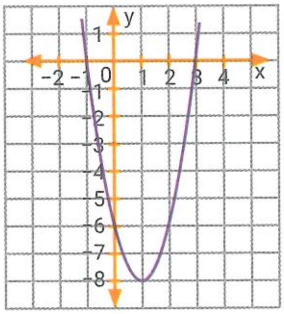
1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   - a. ¿Es cierto que a un valor de la variable independiente le puede corresponder más de un valor de la variable dependiente?
   - b. En la función $f(x) = \frac{5}{x}$, ¿es cierto que 0 pertenece al dominio de la función?
   - c. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que pertenece al gráfico de una función f sabiendo que $f(8) = -3$?

2. ¿Cuál de los siguientes gráficos no corresponde a una función? Expliquen la respuesta.

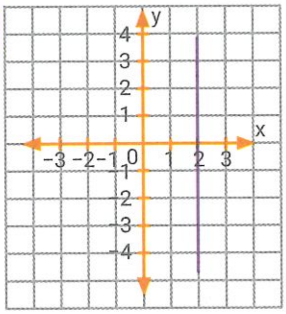
a. ☐



b. ☐

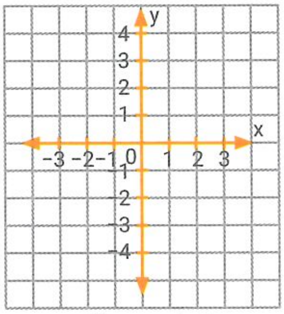


c. ☐



3. Completen la tabla de valores y grafiquen la función. Luego, marquen la raíz y la ordenada al origen.

x	$f(x) = 2x + 1$
−1	
0	
1	
2	

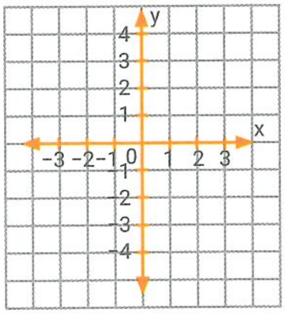


4. Completen las afirmaciones para que resulten verdaderas.

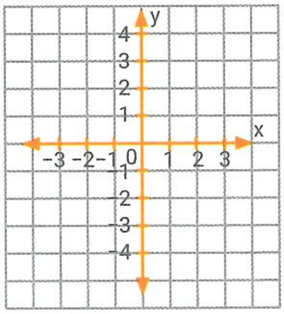
- a. Si el punto (4; ☐) pertenece al gráfico de la función f(x), entonces f(☐) = 9.
- b. Si $f(-1) = 7$, entonces el punto (☐; ☐) pertenece al gráfico de f.
- c. Si el punto (−2; 0) pertenece al gráfico de f(x), entonces f(☐) = ☐.
- d. Si 9 es la ordenada al origen de la función, entonces es el punto (☐; ☐).

5. Representen gráficamente las siguientes relaciones e indiquen si son funciones.

a. Abscisa: todo número real; ordenada: $y = 2$.



b. Abscisa: $x = -2$; ordenada: todo número real.



40. Función lineal

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **función lineal** a toda función cuya fórmula es **y = mx + b**, donde **m es la pendiente** y **b la ordenada al origen**.
La **representación gráfica** de una función lineal es una **recta**.

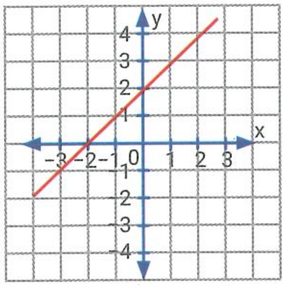
Ecuación explícita de la recta: **y = mx + b**

pendiente — ordenada al origen

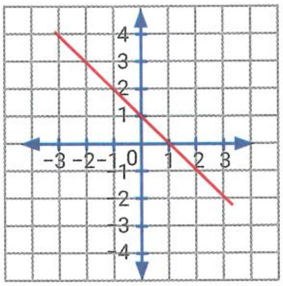
$y = \frac{5}{2}x - 3$ *donde* $\begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ b = -3 \end{cases}$ $\qquad$ $y = 6x$ *donde* $\begin{cases} m = 6 \\ b = 0 \end{cases}$

• La **pendiente m** indica **la inclinación de la recta** y determina si la función lineal es **creciente**, **decreciente** o **constante** según su valor sea **positivo**, **negativo** o **nulo**, respectivamente.

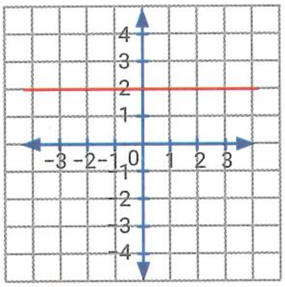
m > 0



m < 0



m = 0



• La **ordenada al origen b** indica **donde la recta corta al eje y**.

Cálculo de pendiente y ordenada al origen

Para **calcular la pendiente** se debe encontrar el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

• Para **calcular la ordenada al origen**, que es donde la recta corta al eje "y" (x = 0), se debe hallar:

$$f(0) = m \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$$

• Para **calcular la raíz**, que es donde la recta corta al eje "x" (y = 0), se debe igualar a 0 y despejar x:

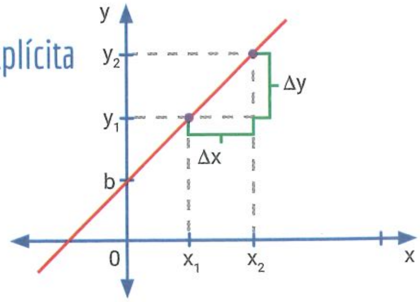
$$0 = mx + b \Rightarrow x = -\frac{b}{m}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/rfl * para mirar un video donde se explica cómo se grafica una función lineal a partir de su fórmula.

*Enlace acortado de https://youtu.be/NmgsJXOoolg

Representación gráfica de una función lineal dada su forma explícita



Para **graficar una función lineal**, se deben ubicar dos puntos. Primero se marca el punto que corresponde a la ordenada al origen (**b**) y, a partir de ella, se marca un segundo punto que se ubica según la información brindada por la pendiente (**m**).

$$m = \frac{\Delta y \text{ (indica el desplazamiento vertical)}}{\Delta x \text{ (indica el desplazamiento horizontal)}}$$

40. Función lineal

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la fórmula $3x + y = 8$ está escrita en forma explícita?

b. ¿Cuánto vale la pendiente y la ordenada al origen de la recta $y = 5x + 3$?

c. ¿Es cierto que la recta de ecuación $y = -2x$ es decreciente?

7. Completen la tabla.

Función lineal	m	b	¿Creciente, decreciente o constante?
$y = 6x - 1$			
$y = -4x$			
$y = -2x - 8$			
$y = 9$			
$y = 0,5x + 2$			
$y = 2x - \frac{1}{9}$			

8. Calculen la pendiente de la recta que pasa por los puntos "p" y "q", en cada caso.

$p = (x_1; y_1)$	$q = (x_2; y_2)$	m
(−1; 8)	(2; 9)	
(0; 4)	(5; −6)	
(3; 9)	(2; 0)	
(−2; −4)	(3; −4)	

9. Escriban la ecuación explícita de la recta que cumple lo pedido en cada caso.

a. Tiene por pendiente 5 y ordenada al origen −7.

b. Tiene la misma pendiente que la recta $y = 8x - 6$ y corta al eje "y" en 3.

c. Es una función constante y tiene la misma ordenada al origen que $y = 2x + 1$.

d. Tiene pendiente −4 y pasa por el origen del sistema de coordenadas.

10. Grafiquen en sus carpetas las siguientes funciones lineales.

a. $y = 2x + 5$　　b. $y = \frac{2}{3}x - 1$　　c. $y = -3$　　d. $y = -4x + 1$

41. Ecuación de la recta

▶ SABERES DINÁMICOS

Se puede **hallar la ecuación explícita** de la recta a partir de ciertos datos.

- La pendiente m y un punto $p = (x_1; y_1)$ de la recta. ⟶ $\mathbf{y - y_1 = m\,.\,(x - x_1)}$

La ecuación explícita de una recta que tiene pendiente m = 4 y pasa por el punto (1; 7).

$$y - 7 = 4\,.\,(x - 1) \Rightarrow y - 7 = 4x - 4 \Rightarrow y = 4x - 4 + 7 \Rightarrow \mathbf{y = 4x + 3}$$

- Dos puntos $p = (x_1; y_1)$ y $q = (x_2; y_2)$ de la recta. ⟶ $\mathbf{\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$

La ecuación explícita de una recta que pasa por los puntos (2; 1) y (−3; −9).

$$\frac{y-1}{-9-1} = \frac{x-2}{-3-2} \Rightarrow \frac{y-1}{-10} = \frac{x-2}{-5} \Rightarrow y - 1 = -10\,.\,\frac{x-2}{-5}$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2\,.\,(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 1 \Rightarrow \mathbf{y = 2x - 3}$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.	Dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.
P: $y = a_1x + b_1$ R: $y = a_2x + b_2$	P: $y = a_1x + b_1$ R: $y = a_2x + b_2$
$P \parallel R \Leftrightarrow a_1 = a_2$	$P \perp R \Leftrightarrow a_1 = -\dfrac{1}{a_2}$
La recta $y = 2x - 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 9$ porque ambas tienen la misma pendiente.	La recta $y = 7x + 6$ es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{7}x + 1$ porque las pendientes son inversas y opuestas.

Si no cumplen ninguna de las condiciones anteriores, las rectas son **oblicuas**.

Ecuación segmentaria

La ecuación de toda recta que no pasa por el origen del sistema se puede escribir en **forma segmentaria**.

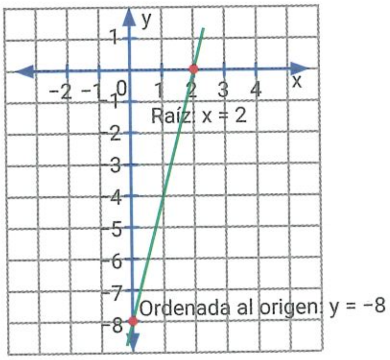
$$\frac{x}{r} + \frac{y}{b} = 1$$

Los denominadores **r** y **b** representan la raíz (abscisa al origen) y la ordenada al origen, respectivamente.

- Para pasar de la ecuación explícita a la segmentaria, se procede de la siguiente manera.

$$y = 4x - 8 \Rightarrow -4x + y = -8 \Rightarrow \frac{-4x + y}{-8} = \frac{-8}{-8} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-8} = 1$$

La raíz (abscisa al origen) es 2 y la ordenada al origen es −8.



41. Ecuación de la recta

Test de comprensión

11. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la recta y + x = 8 es paralela a la recta y = x − 5?

b. ¿Cuál es la pendiente de la recta $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1$?

c. ¿Por qué la ecuación de una recta que pasa por el origen no se puede escribir en forma segmentaria?

12. Tengan en cuenta los datos y completen la tabla con la ecuación explícita.

Pendiente	Pasa por el punto p	Ecuación explícita
m = 5	p = (−2; −12)	
$m = -\frac{1}{2}$	p = (4; −1)	
m = −3	$p = \left(\frac{1}{4}; -1\right)$	
m = 8	p = (3; 24)	

13. Escriban la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos indicados

a. p = (1; 4) y q = (−1; −10)

c. p = (1; 9) y q = (−7; 9)

b. p = (0; 6) y q = (3; −3)

d. p = (7; 1) y q = (−5; 13)

14. Lean atentamente y resuelvan.

a. Escriban la ecuación de una recta paralela a la recta y = 5x + 11. ¿Es única la respuesta?

b. Escriban la ecuación de una recta perpendicular a la recta y = 2x − 11. ¿Es única la respuesta?

c. Escriban la ecuación de una recta paralela a la recta y = −5x cuya ordenada al origen sea 3. ¿Es única la respuesta?

41. Ecuación de la recta

15. Completen la tabla.

Ecuación explícita	Ecuación segmentaria
$y = 6x - 3$	
	$\dfrac{x}{\frac{-3}{2}} + y = 1$
$y = -4x + 12$	
	$\dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{-1} = 1$
	$x + \dfrac{y}{9} = 1$

16. Completen con // o ⊥ según corresponda.

a. $2x = y + 6$ ☐ $y = 2 \,.\, (x - 1) + 9$

b. $y + x - 3 = 0$ ☐ $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1$

c. $6 \,.\, (x - y) + 9 = 0$ ☐ $y = - x - 11$

d. $\dfrac{x}{-2} + y = 1$ ☐ $y = -2 \,.\, (x + 4) + 8$

e. $y = 8x - 3$ ☐ $-8x + y - 7 = 0$

f. $\dfrac{x}{3} + y = 1$ ☐ $\dfrac{x}{\frac{-7}{3}} + \dfrac{y}{7} = 1$

17. Tengan en cuenta la ecuación de la recta R y escriban la ecuación explícita de las rectas T y S sabiendo que T//R y S⊥T; y que T y S tienen ordenada al origen igual a 7.

a. R: $y = 4 \,.\, (x - 1) + 2$

b. R: $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-10} = 1$

18. Escriban la ecuación explícita de cada recta usando los datos dados.

a. Es paralela a la recta $y - 7x = 1$ y pasa por el punto (2; 5).

b. Es perpendicular a la recta $y = 5x + 3$ y corta al eje "y" en 8.

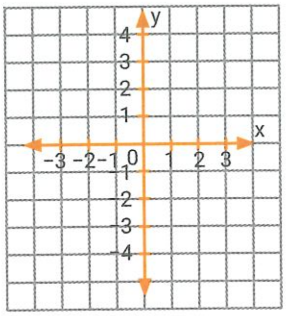
c. Es paralela a la recta que pasa por los puntos (1; 3) y (2; 5) y pasa por el origen de coordenadas.

d. Es perpendicular a la recta $y + 0{,}5x + 8 = 0$ y su raíz es -3.

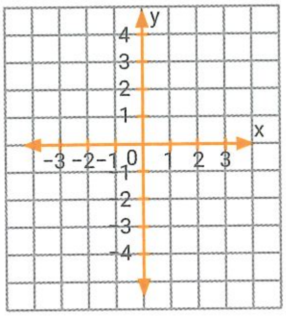
41. Ecuación de la recta

19. Realicen un gráfico aproximado de una recta de ecuación $\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$ según la información dada en cada caso.

a. $r < 0$; $s < 0$

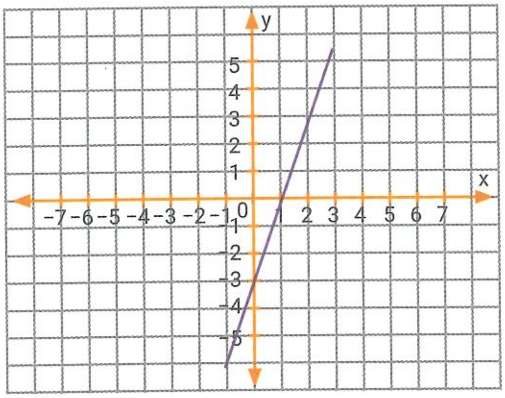


b. $r > 0$; $s < 0$

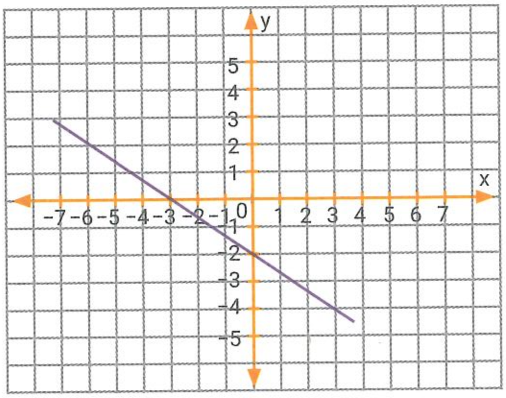


20. Escriban en forma explícita y segmentaria la ecuación de cada una de las rectas graficadas.

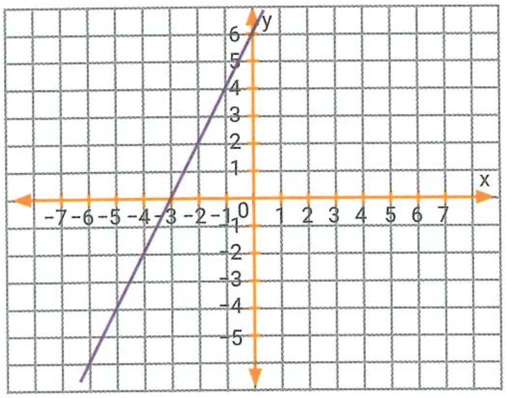
a.



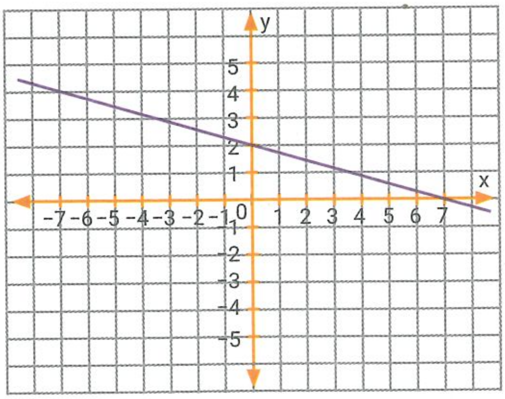
c.



b.



d.



42. Distancia entre puntos y rectas

▶ SABERES DINÁMICOS

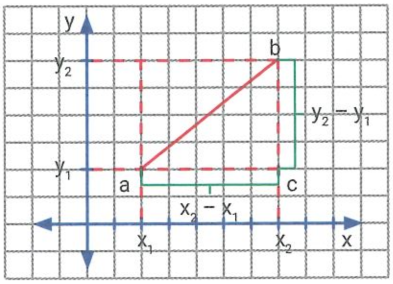
Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** del plano es la longitud del segmento que une dichos puntos.
La distancia $D_{(a;\,b)}$ entre los puntos a y b, es la longitud del segmento ab que se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

Para recordar pág. 181

$$\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 \rightarrow \overline{ab} = \sqrt{\overline{ac}^2 + \overline{bc}^2}$$

$$D_{(a;\,b)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Distancia entre a = (−2; 3) y b = (4; 1):

$$D_{(a;\,b)} = \sqrt{[4-(-2)]^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \rightarrow D_{(a;\,b)} = 2\sqrt{10}$$

Distancia entre a = (4; 2) y b = (7; 6):

$$D_{(a;\,b)} = \sqrt{(7-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \rightarrow D_{(a;\,b)} = 5$$

Distancia de un punto a una recta

La **distancia de un punto a una recta** (que no contiene a ese punto) es la longitud del segmento perpendicular a la recta que tiene por extremos a un punto de la recta y el punto considerado.

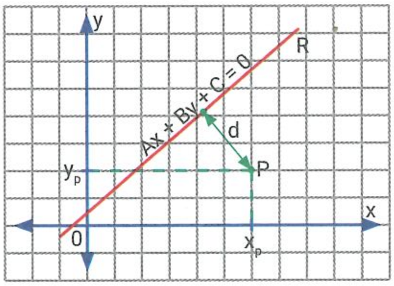
En la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta se utiliza la **ecuación general** o **implícita de la recta**. Su fórmula es: → $Ax + By + C = 0$

- Para pasar de la ecuación explícita a la implícita o general, se pasan todos los términos de un solo lado para que la ecuación quede igualada a 0.

$y = -5x + 8 \Rightarrow 5x + y - 8 = 0$ ← Es la ecuación implícita de la recta, donde $A = 5; B = 1; C = -8$.

- La fórmula para calcular la distancia de un punto $p = (x_p; y_p)$ a una recta R, de ecuación implícita o general R: $Ax + By + C = 0$ es:

$$d = \left| \frac{Ax_p + By_p + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



Calculen la distancia del punto a = (3,2) a la recta R: $y = \frac{1}{2}x + 4$.

$y = \frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + y - 4 = 0$ ← Se pasa a la forma general de la recta para poder aplicar la fórmula dada.

$\left| \frac{-0{,}5 \,.\, 3 + 1 \,.\, 2 + (-4)}{\sqrt{(-0{,}5)^2 + 1^2}} \right| = 3{,}13$ Con los valores de A, B, C y las coordenadas del punto se calcula la distancia.

42. Distancia entre puntos y rectas

Test de comprensión

21. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la distancia entre el punto (3; 4) y el origen de coordenadas es igual a 5?

b. ¿Cómo debe estar escrita la ecuación de una recta si se desea calcular la distancia de un punto $(x_p; y_p)$ a esa recta?

c. ¿Cuáles son las coordenadas del punto "b", sabiendo que a = (1; 5) y que $D_{(a;\,b)} = \sqrt{(4-1)^2 + (-5)^2}$?

22. Calculen la distancia entre los puntos pedidos.

a. (1; 4) y (7; −1)

b. (0; 2) y (4; 0)

c. (−1; −2) y (8; −2)

d. (8; 0) y (0; −6)

e. (3; 3) y (9; 9)

f. (−5; 7) y (−3; 5)

g. (0,5; 1) y (1; 6)

h. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ y (0; 0)

23. Calculen la coordenada faltante a partir de los datos.

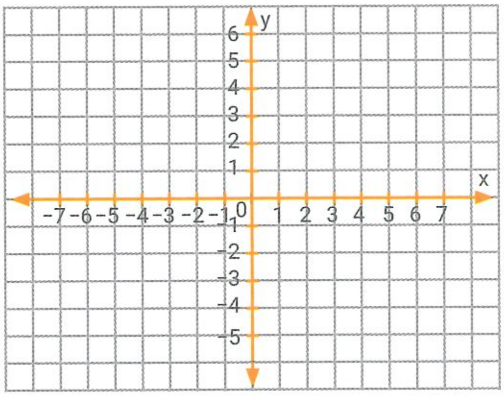
a. a = (2; 3); b = (−1; y); $D_{(a;\,b)} = \sqrt{13}$

b. a = (x; 6); b = (2; 0); $D_{(a;\,b)} = 10$

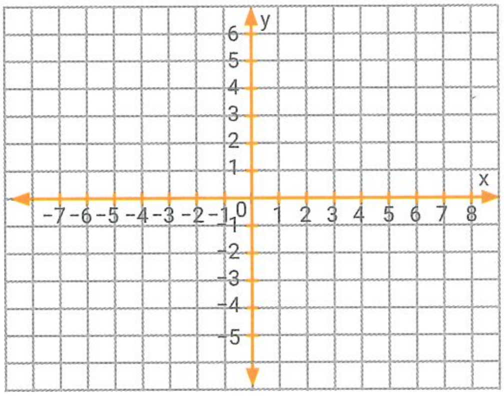
42. Distancia entre puntos y rectas

24. Ubiquen los puntos en un sistema de ejes cartesianos y calculen el perímetro de la figura que queda determinada.

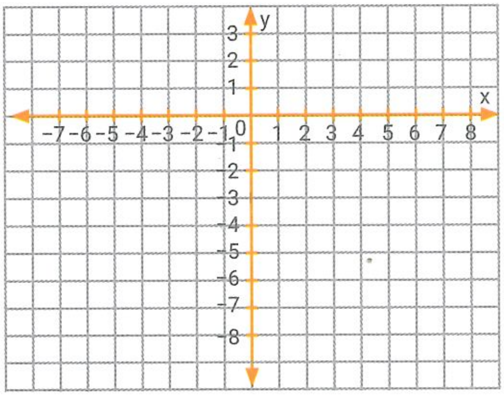
a. a = (−3; 2), b = (0; 5), c = (3; 2).



b. m = (−2; 0), n = (0; 4), o = (8; 4), q = (6; 0).



c. e = (0; 0), f = (−2; 1), g (−4; 0), h = (−2; −7).



25. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La distancia entre p = (8, 0) y q = (0; −6) es igual a $2\sqrt{7}$.

b. La distancia del punto (−3; 4) al origen del sistema es igual a 5.

42. Distancia entre puntos y rectas

26. **Calculen la distancia entre el punto y la recta dada en cada caso.**

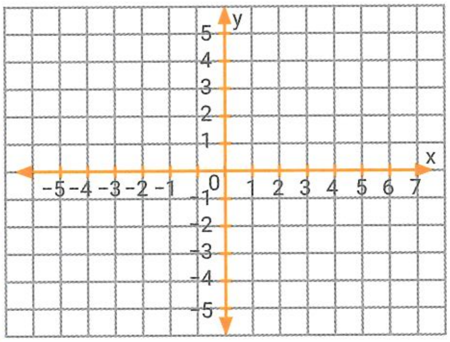
a. $m = (-1; 5)$ y $R: 2x + 4y - 8 = 0$.

b. $a = \left(4; \frac{2}{3}\right)$ y $T: 3y = \frac{1}{2}x + 4$.

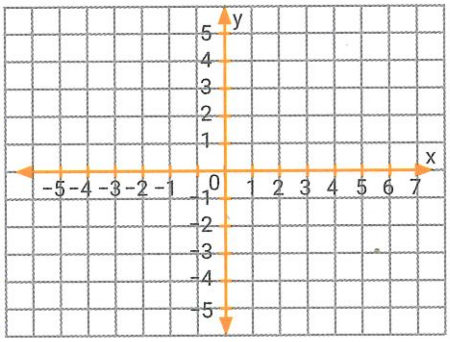
c. $z = (4; 3)$ y $S: 5x - 12y = 10$.

27. **Resuelvan. Luego, representen las rectas y marquen la distancia pedida en cada caso.**

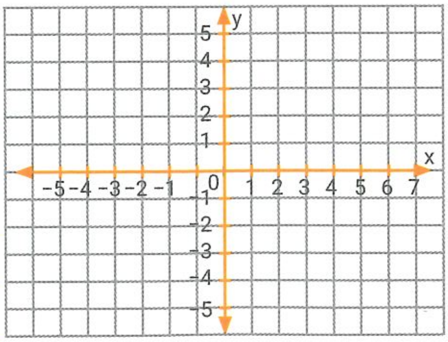
a. Calculen la distancia de la recta $3x + 4y + 15 = 0$ al origen de coordenadas.



b. Calculen la distancia del punto $p = (-1; 2)$ a la recta R que pasa por los puntos $(2; 2)$ y $(1; -2)$.



c. Calculen la distancia entre la ordenada al origen de la recta $S: 2x - 8y = 4$ y la recta T, siendo T paralela a la recta $U: y = 2x + 11$ cuya raíz es 5.

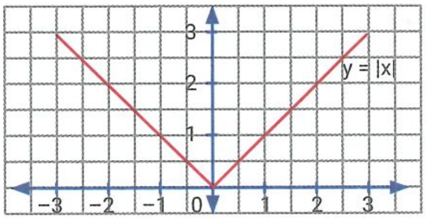


43. Función módulo

▶ SABERES DINÁMICOS

La función **módulo** o **valor absoluto** se escribe f(x) = |x|.
Es una función cuyo dominio es Dm = ℝ y se define como:

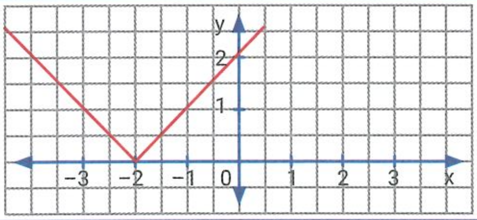
$$f(x) = |x| \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Funciones de la forma f(x) = |x + c|

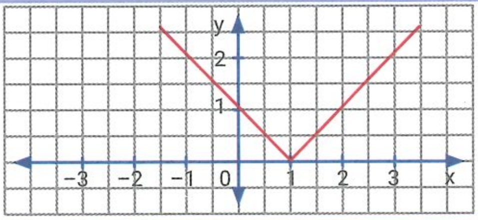
Si c > 0, la función queda desplazada "c" unidades hacia la izquierda.

f(x) = |x + 2|



Si c < 0, la función queda desplazada "c" unidades hacia la derecha.

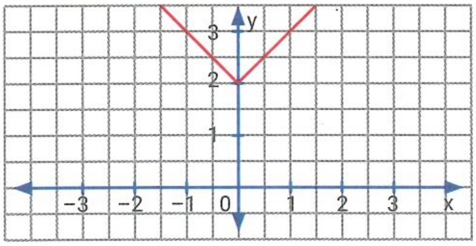
f(x) = |x − 1|



Funciones de la forma f(x) = |x| + c

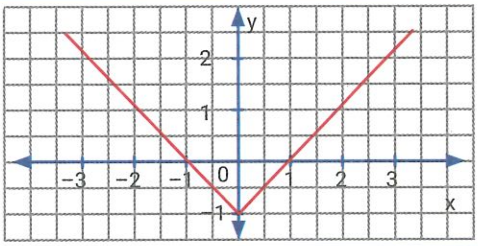
Si c > 0, la función queda desplazada "c" unidades hacia arriba.

f(x) = |x| + 2



Si c < 0, la función queda desplazada "c" unidades hacia abajo.

f(x) = |x| − 1

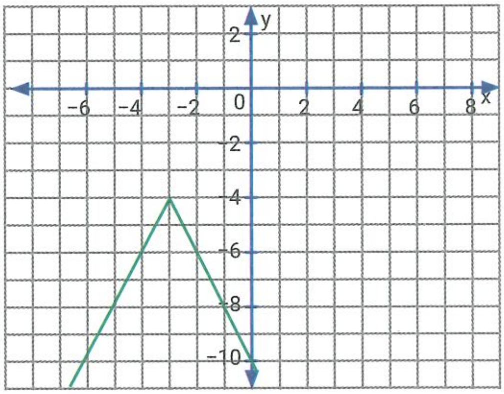


Para **graficar** ciertas **funciones**, hay que redefinirlas aplicando la definición de módulo. A partir de esto, se determinan los tramos y las rectas a graficar en ese tramo.

f(x) = −2 . |x + 3| − 4

x + 3 ≥ 0 *⇒ x ≥ −3 ∧ |x + 3| = (x + 3)*
f(x) = −2 . (x + 3) − 4 = −2x − 6 − 4
f(x) = −2x − 10

x + 3 < 0 *⇒ x < −3 ∧ |x + 3| = (−x − 3)*
f(x) = −2 . (−x − 3) − 4 = 2x + 6 − 4
f(x) = 2x + 2



43. Función módulo

Test de comprensión

28. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la gráfica de la función $f(x) = |x + 6|$ está desplazada 6 unidades hacia arriba?

b. ¿Cuáles son las raíces de la función $g(x) = 2|x - 1| - 6$?

c. ¿Cuál es la imagen de la función $h(x) = |x| - 1$?

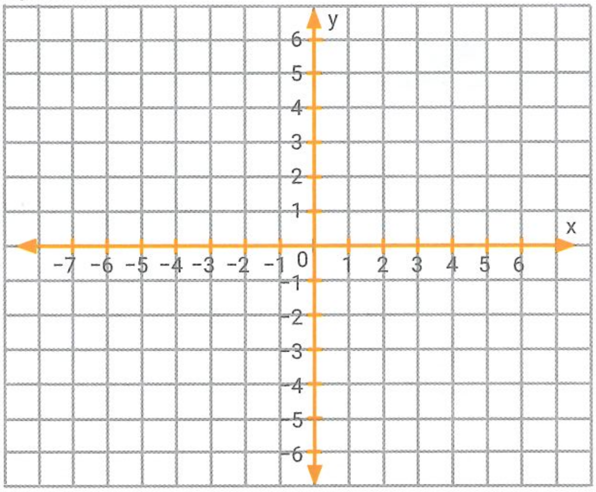
29. **Grafiquen las siguientes funciones y luego completen la tabla.**

$f(x) = 3 . |x|$

$g(x) = |x + 1|$

$h(x) = -2 . |x| + 1$

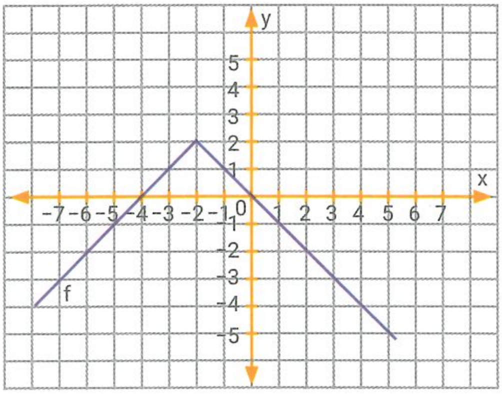
$i(x) = |x - 3| + 1$



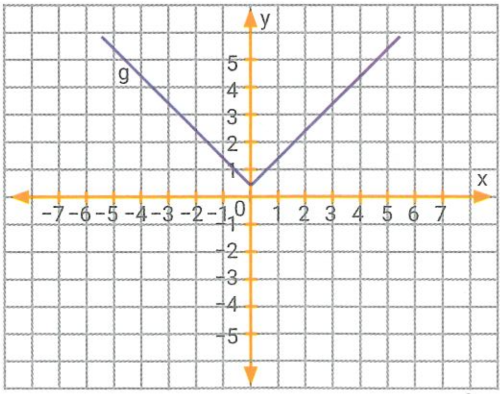
Función	Dominio	Imagen	Raíces	Ordenada al origen
f(x)				
g(x)				
h(x)				
i(x)				

30. **Observen los gráficos, analicen los desplazamientos y reconstruyan la fórmula correspondiente a cada función módulo.**

a.



b.



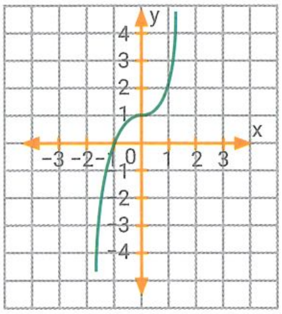
f(x) = ______________________

g(x) = ______________________

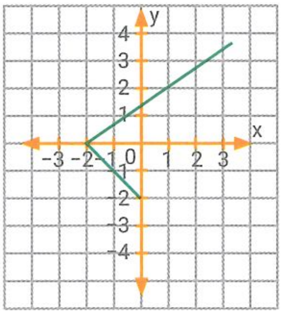
Integración

31. Indiquen cuál de los siguientes gráficos no corresponde a una función. Expliquen la respuesta.

a.



b.



32. Completen la tabla.

Recta	m	b	¿Creciente, decreciente o constante?
$y = 6x - 1$			
$y = -2x$			
$y = -3$			
$y = 5 + x$			

33. Escriban la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $p = (8; -4)$ y $q = (7; 6)$

b. $p = (0; -1)$ y $q = (2; 5)$

c. $p = (2; 0)$ y $q = (0; 6)$

d. $p = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ y $(1; 3)$

e. $p = (0; 0)$ y $q\ (-3; 3)$

f. $p = (0{,}5; 1)$ y $q = (-0{,}5; 3)$

34. Expresen en forma segmentaria las siguientes ecuaciones explícitas de las rectas.

a. $y = -2x + 5$

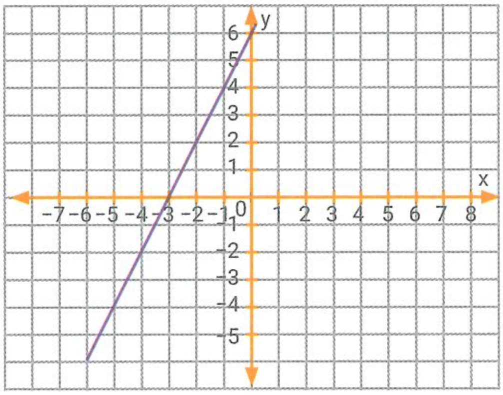
b. $y = 7x - \frac{1}{2}$

c. $y = 8x - 2$

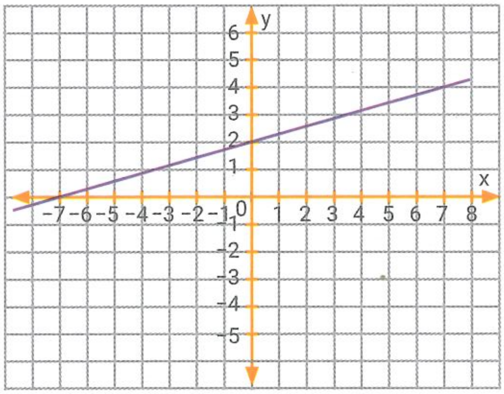
d. $y = -x - 1$

35. Reconstruyan la ecuación segmentaria a partir de la información dada en los gráficos.

a.



b.



36. Completen con // o ⊥ según corresponda.

a. $2 \,.\, (x - 1) + y = 2$ ☐ $y = -2x + 7$

b. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-12} = 1$ ☐ $y + \frac{1}{3}x = 1$

c. $6 \,.\, (x + y) = 0$ ☐ $y = \frac{1}{6}x$

d. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ☐ $y = -\frac{2}{3}x$

37. **Escriban la ecuación explícita de la recta R pedida en cada caso.**

a. R es paralela a $y = 3x + 1$ y tiene por raíz $x = -2$.

b. R es perpendicular a la recta $y + 2x = 0$ y corta al eje y en 4.

c. R pasa por el origen de los ejes cartesianos y es paralela a la recta que pasa por los puntos (0; 5) y (2; 0).

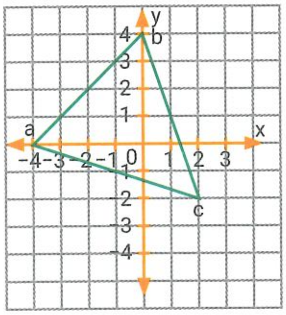
d. T tiene por raíz 9 y ordenada al origen 1. R es perpendicular a T y tiene su misma ordenada al origen.

38. **Completen la tabla con la distancia entre los puntos p y q dados en cada caso.**

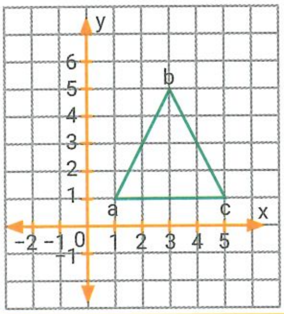
p	q	$D_{(p;\,q)}$
(1; 9)	(2; 8)	
(−2; 0)	(4; 1)	
(4; −1)	(8; 2)	
(0; 0)	(5; −5)	

39. **Calculen el perímetro de los siguientes triángulos.**

a.



b.



40. **Calculen en cada caso la distancia del punto p a la recta T.**

a. p = (−1; 1) y T: $2x + 4y - 1 = 0$.

b. p = (−2; 3) y T: $2 \cdot (x + 1) = y$.

c. p = (0; 2) y T: recta que pasa por (3; 2) y es paralela a $y = 5x$.

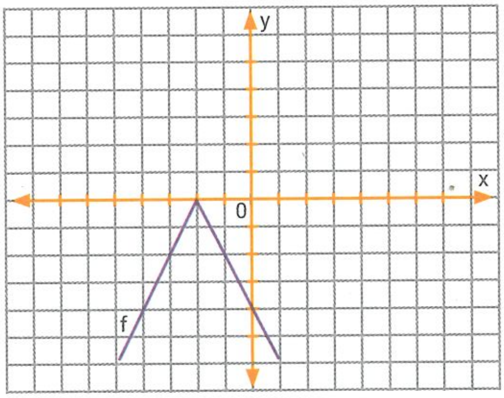
d. p = (−1; 0) y T: recta cuya ordenada al origen es $b = 1$ y es perpendicular a $y = -\frac{1}{3}x$.

41. **Grafiquen las siguientes funciones. Luego, completen la tabla.**

$f(x) = -|x|$ $\quad g(x) = 2 \cdot |x + 4|$ $\quad h(x) = |x| - 9$

Función	Dm	Im	Raíces	Ordenada al origen
f(x)				
g(x)				
h(x)				

42. **Completen con >, < o =, sabiendo que el gráfico corresponde a una función módulo de la forma $f(x) = a \cdot |x + m| + b$.**



a. a ☐ 0 b. m ☐ 0 c. b ☐ 0

43. **Lean atentamente e indiquen si es cierta la siguiente afirmación. Expliquen la respuesta.**

"El conjunto de las raíces de $f(x) = |2x - 1| - 1$ es $C_0 = \{0; 1\}$"

44. Función cuadrática

▶ SABERES DINÁMICOS

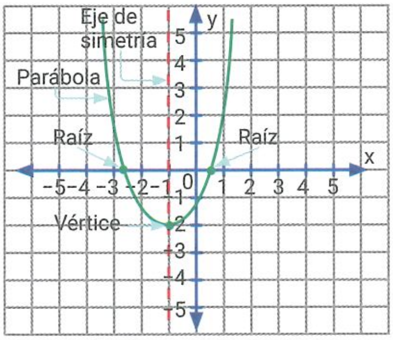
La **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado de la forma:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{término independiente}} \quad (a, b, c \text{ son números reales y } a \neq 0)$$

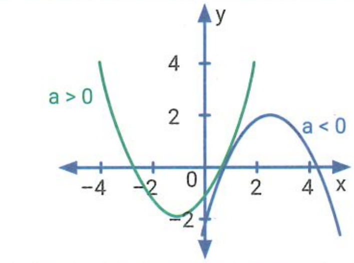
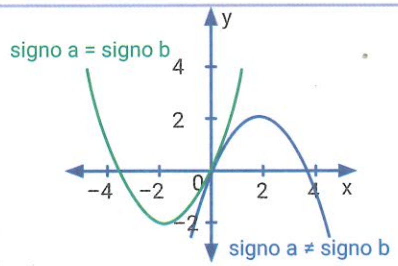
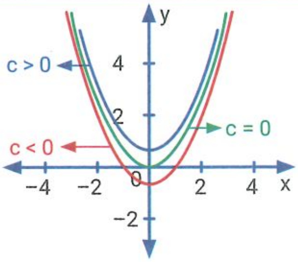
$f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \Rightarrow a = 3; b = -5; c = 1$ *$g(x) = -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow a = -1; b = 6; c = -8$*

La **representación gráfica** de una función cuadrática es una **parábola**.

Elementos de la parábola
Raíces: son los puntos de intersección de la parábola con el eje "x".
Ordenada al origen: es el punto de intersección de la parábola con el eje "y".
Vértice: es el punto máximo o mínimo de la parábola.
Eje de simetría: es la recta paralela al eje "y" que pasa por el vértice de la parábola.



• Los coeficientes a, b y c determinan cómo va a resultar la gráfica de la parábola.

Coeficiente	Gráfica de la parábola	Ejemplo
a	$a > 0 \Rightarrow$ La parábola "va hacia arriba". En este caso, el vértice es un mínimo. $a < 0 \Rightarrow$ La parábola "va hacia abajo". En este caso, el vértice es un máximo.	
b	Si "a" y "b" tienen el mismo signo $\Rightarrow$ la gráfica se desplaza hacia la izquierda. Si "a" y "b" tienen distinto signo $\Rightarrow$ la gráfica se desplaza hacia la derecha.	
c	$c > 0 \Rightarrow$ La ordenada al origen es positiva. $c = 0 \Rightarrow$ la parábola pasa por el origen del sistema de coordenadas. $c < 0 \Rightarrow$ La ordenada al origen es negativa.	

44. Función cuadrática

Test de comprensión

44. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cómo resulta la fórmula de una parábola sabiendo $a = -6$, $b = 1$ y $c = 2$?

b. ¿Cuál de las siguientes parábolas tiene por vértice un mínimo, siendo sus fórmulas: $f(x) = -3x^2 + 9x + 11$ y $h(x) = 4x^2 + 5$?

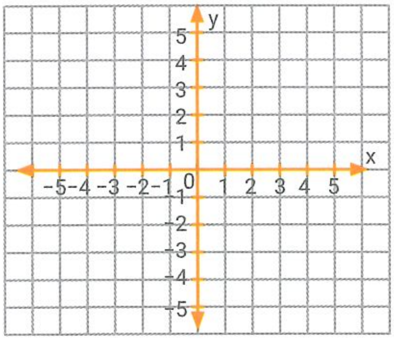
c. Expliquen si $f(x) = (x - 1)^2 - x^2$ es una función cuadrática.

45. Completen la tabla.

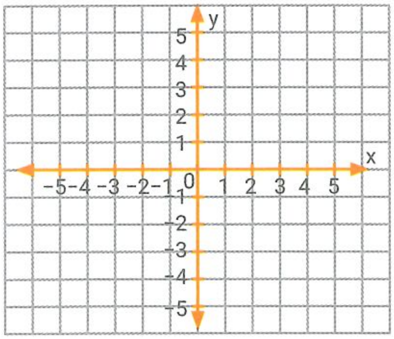
Función	a	b	c
$f(x) = 4x^2 + 6x$			
	-3	5	$-\frac{1}{2}$
$f(x) = -x^2 - 2x + 6$			
	1	0	4

46. Aproximen la gráfica de una parábola que cumpla lo pedido en cada caso.

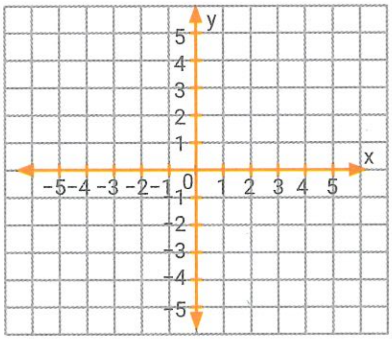
a. La parábola pasa por el origen del sistema de ejes cartesianos y el vértice es un máximo.



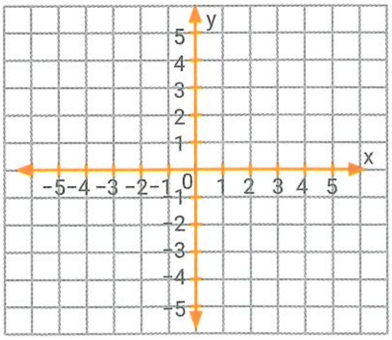
b. La fórmula de la parábola tiene $a > 0$ y las dos raíces son positivas.



c. La ordenada al origen es positiva y el vértice es un mínimo.



d. La fórmula de la parábola tiene $a < 0$ y la ordenada al origen es el vértice.



45. Raíces de una función cuadrática. Discriminante

▶ SABERES DINÁMICOS

Las **raíces o ceros de la función cuadrática** son aquellos valores de "x" para los cuales la función f(x) es igual a 0.

• Para hallar analíticamente las raíces de una función cuadrática se iguala a cero la función f(x) = 0 y luego se calculan mediante la siguiente fórmula resolvente:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

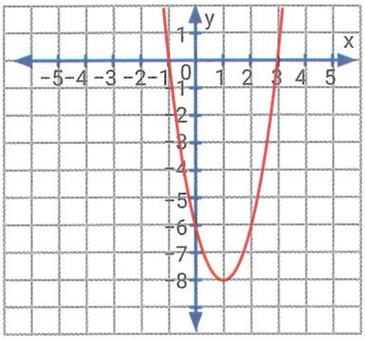
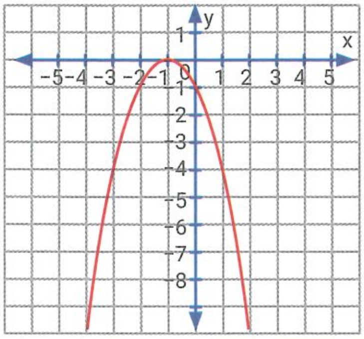
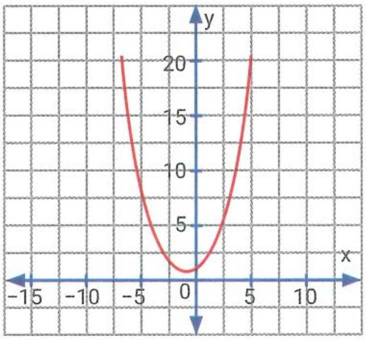
$f(x) = 2x^2 + 4x - 30 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0$ (donde $a = 2$; $b = 4$; $c = -30$)

$$x_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,.\,2\,.\,(-30)}}{2\,.\,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{4} = \frac{-4 \pm 16}{4} = \begin{cases} \frac{-4+16}{4} = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \\ \frac{-4-16}{4} = -5 \Rightarrow x_2 = -5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto de raíces de la función f(x) es $C_0 = \{-5; 3\}$.

• Al radicando **$b^2 - 4ac$** se lo llama **discriminante** y se lo designa con la letra griega delta (Δ). Su valor sirve para discriminar la naturaleza de las raíces.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ > 0	Δ = 0	Δ < 0
Las raíces son reales y distintas.	Las raíces son reales iguales.	No tiene raíces reales.
La gráfica tiene dos puntos de intersección con el eje x.	La gráfica tiene un punto de intersección con el eje x.	La gráfica no tiene puntos de intersección con el eje x.
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ $\Delta = (-4)^2 - 4\,.\,2\,.\,(-6) = 64$ $\Rightarrow \Delta > 0$	$f(x) = -x^2 - 2x - 1$ $\Delta = (-2)^2 - 4\,.\,(-1)\,.\,(-1) = 0$ $\Rightarrow \Delta = 0$	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ $\Delta = 1^2 - 4\,.\,\frac{1}{2}\,.\,2 = -3$ $\Rightarrow \Delta < 0$
		

ACTIVIDADES

45. Raíces de una función cuadrática. Discriminante

Test de comprensión

47. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. La función $f(x) = x^2 + x - 6$, ¿tiene raíces? ¿Cuáles?

b. Si una parábola interseca al eje de las abscisas en un solo punto, ¿cómo es el valor de Δ al calcular las raíces?

c. ¿Es cierto que las parábolas siempre intersecan al eje de las abscisas?

48. Calculen en forma analítica las raíces de las siguientes funciones cuadráticas.

a. $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$

d. $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

b. $f(x) = -x^2 + 5x$

e. $f(x) = 2x^2 + x + 5$

c. $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$

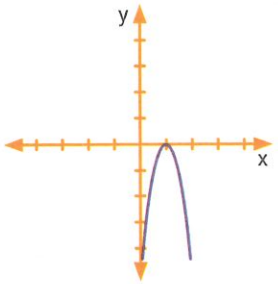
f. $f(x) = -2x^2 + 18$

49. Calculen el discriminante y completen la tabla indicando si tienen raíces reales distintas, iguales o si no tienen raíces reales.

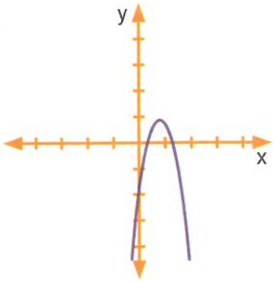
Función	Δ	¿Cómo son las raíces?
$y = 5x^2 - 2x + 11$		
$y = -2x^2 - x + 1$		
$y = x^2 + 10x + 25$		
$y = 6x^2 - 3x$		

50. Observen los gráficos y completen con >, < o = según corresponda.

a. Δ ☐ 0



b. Δ ☐ 0



46. Gráfico de una función cuadrática

▶ SABERES DINÁMICOS

Para realizar el **gráfico de una parábola** $f(x) = ax^2 + bx + c$ se deben calcular sus elementos y luego, representarla.

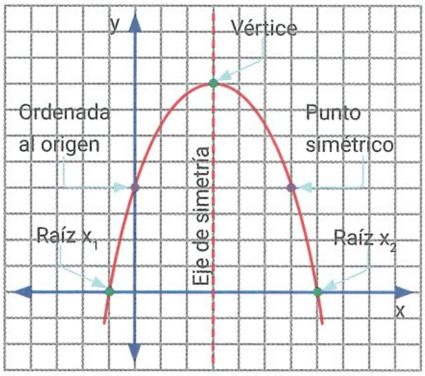
- **Raíces de la parábola**: son los puntos de intersección de la gráfica con el eje x, es decir, $f(x) = 0$.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Vértice de la parábola**: las coordenadas del vértice son: $v = (x_v; y_v)$.

$$x_v = \frac{-b}{2a} \lor x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_v = f(x_v)$$

- **Eje de simetría**: es la recta que divide a la parábola en dos partes simétricas y tiene por ecuación $x = x_v$.
- **Ordenada al origen**: es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, es decir, $f(0) = c$.
- **Punto simétrico**: es el punto simétrico a la ordenada al origen.



Dada $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Raíces:

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 . (-1) . 8}}{2 . (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

$\Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 4$

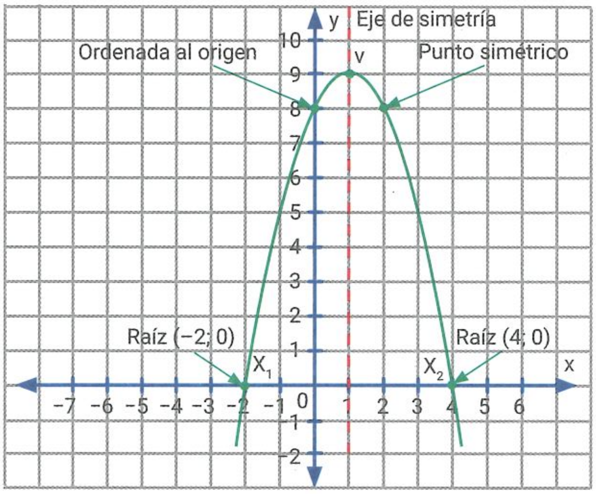
Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-2}{2 . (-1)} \Rightarrow x_v = 1 \\ y_v = -1^2 + 2 . 1 + 8 \Rightarrow y_v = 9 \end{array}\right\} v = (1; 9)$$

***Eje de simetría:** $x = 1$*

***Ordenada al origen:** $(0; 8)$*

***Punto simétrico:** $(2; 8)$*



Áreas dinámicas [Matemática y Física]

La función cuadrática se usa para describir movimientos uniformemente variados donde la aceleración es constante. Por ejemplo, al lanzar un proyectil, para describir la altura (h) alcanzada en un tiempo (t) se usa la función $h(t) = h_i + v_i . t + \frac{1}{2} g . t^2$ (donde h_i es la altura inicial, v_i es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad cuyo valor aproximado es de 9,8 m/s^2).

ACTIVIDADES

46. Gráfico de una función cuadrática

Test de comprensión

51. Respondan y expliquen sus respuestas.

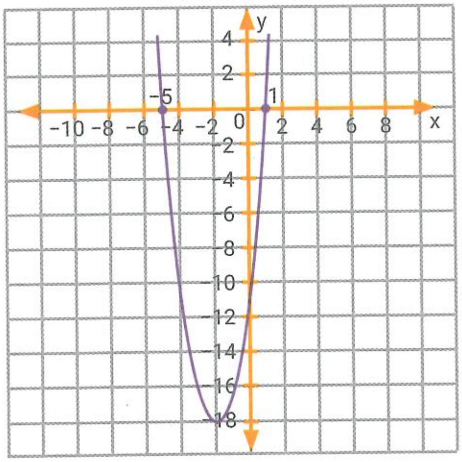
a. ¿Es cierto que en algunas parábolas el vértice es también raíz?

b. Si el eje de simetría coincide con el eje "y", ¿es cierto que el vértice estará sobre el eje "x"?

c. En una función cuadrática, ¿cuál es el punto en el que la parábola pasa de ser decreciente a ser creciente o viceversa?

52. Completen lo pedido en cada caso a partir de la información brindada por los gráficos.

a.



Conjunto de raíces C_0: ______

Vértice: ______

Eje de simetría: ______

Ordenada al origen: ______

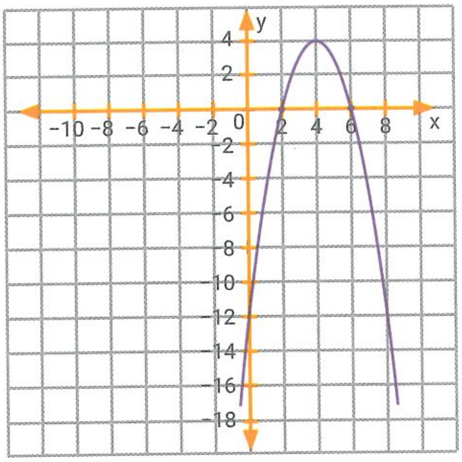
Intervalo de crecimiento: ______

Intervalo de decrecimiento: ______

Conjunto de positividad (C^+): ______

Conjunto de negatividad (C^-): ______

b.



Conjunto de raíces C_0: ______

Vértice: ______

Eje de simetría: ______

Ordenada al origen: ______

Intervalo de crecimiento: ______

Intervalo de decrecimiento: ______

Conjunto de positividad (C^+): ______

Conjunto de negatividad (C^-): ______

53. Aproximen las gráficas de las parábolas que cumplan lo pedido en cada caso. Luego, indiquen si el vértice es máximo o mínimo y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

a. Tiene por raíces $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ y el vértice es $v = (-1; 8)$.

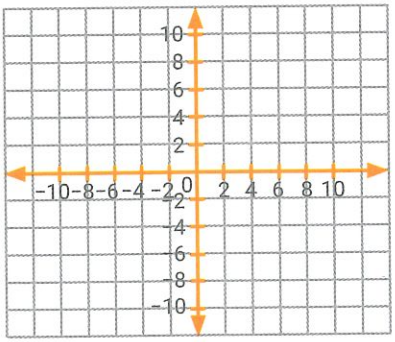
______

______

b. El conjunto de negatividad es $C^- = (-6; -2)$ y el vértice es $v = (-4; -1)$.

______

______



46. Gráfico de una función cuadrática

54. Completen la tabla y realicen el gráfico de cada parábola.

a.

Función	$f(x) = 3x^2 - 6x - 9$	Gráfico
Raíces		
Vértice		
Eje de simetría		
Ordenada al origen		
Punto simétrico		
Intervalo de crecimiento		
Intervalo de decrecimiento		
Conjunto de positividad		
Conjunto de negatividad		

b.

Función	$f(x) = -x^2 + 4x - 4$	Gráfico
Raíces		
Vértice		
Eje de simetría		
Ordenada al origen		
Punto simétrico		
Intervalo de crecimiento		
Intervalo de decrecimiento		
Conjunto de positividad		
Conjunto de negatividad		

c.

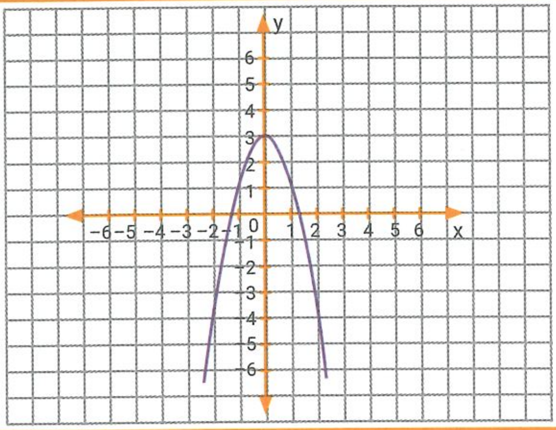
Función	$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$	Gráfico
Raíces		
Vértice		
Eje de simetría		
Ordenada al origen		
Punto simétrico		
Intervalo de crecimiento		
Intervalo de decrecimiento		
Conjunto de positividad		
Conjunto de negatividad		

46. Gráfico de una función cuadrática

55. Observen cada gráfico y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a.

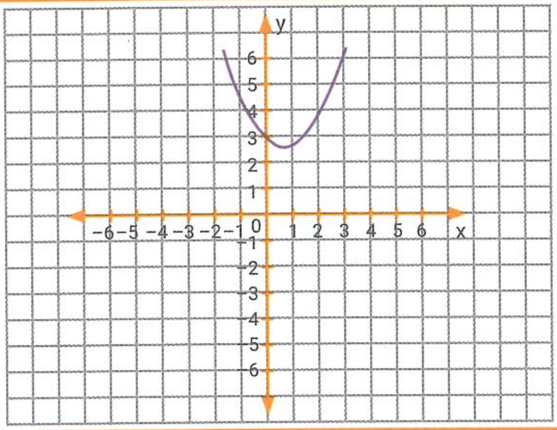
Gráfico



Características	¿V o F?
$\Delta > 0$	
El vértice es un mínimo	
Eje de simetría en $x = 0$	
La ordenada al origen es 3	
$a > 0$	
Crecim. = $(-\infty; 3)$	
Decrecim. = $(0; +\infty)$	
$C^- = \varnothing$	
$C^+ = (-\infty; +\infty)$	

b.

Gráfico



Características	¿V o F?
$\Delta = 0$	
El vértice es un mínimo	
No tiene eje de simetría	
La ordenada al origen es 3	
$a > 0$	
Crecim. = $(-\infty; +\infty)$	
Decrecim. = $\varnothing$	
$C^- = \varnothing$	
$C^+ = (-\infty; +\infty)$	

56. Inventen la fórmula de una función cuadrática que cumpla lo pedido en cada caso.

a. La parábola no corta al eje “x”.

b. La parábola “va hacia arriba” y corta en dos puntos al eje “x”.

c. La parábola “va hacia abajo” y corta en un solo punto al eje “x”.

47. Distintas expresiones de la función cuadrática

▶ SABERES DINÁMICOS

La función cuadrática puede ser expresada de diferentes formas: **polinómica**, **canónica** y **factorizada**. Cada una de ellas brinda diferente información que se puede reconocer con facilidad.

Forma polinómica	Forma canónica	Forma factorizada
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a \,.\, (x - x_v)^2 + y_v$	$f(x) = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$
"a" indica si la parábola va a estar dirigida hacia arriba o hacia abajo, "b" indica el corrimiento lateral de la parábola y "c" es la ordenada al origen.	"a" indica si la parábola va hacia arriba o hacia abajo y $(x_v; y_v)$ son las coordenadas del vértice de la parábola.	"a" indica si la parábola va hacia arriba o hacia abajo y x_1 y x_2 son las raíces.
$f(x) = 2x^2 + 5x - 4$ *$a = 2;\ b = 5;\ c = -4$*	*$f(x) = -2 \,.\, (x + 1)^2 - 3$* *$a = -2;\ v = (-1; -3)$*	*$f(x) = 5 \,.\, (x - 4) \,.\, (x + 9)$* *$a = 5;\ x_1 = 4;\ x_2 = -9$*
Cuando está escrita en forma polinómica, para encontrar las raíces y las coordenadas del vértice, se usan las fórmulas correspondientes.	Cuando está escrita en esta forma, para encontrar las raíces y la ordenada al origen hay que calcularlas.	Cuando está escrita en esta forma, para encontrar las coordenadas del vértice y la ordenada al origen hay que calcularlas.

• Para **pasar de una forma a otra** se pueden seguir los pasos indicados en el diagrama.

Forma polinómica
$y = ax^2 + bx + c$

Polinómica a factorizada: se buscan las raíces.
Factorizada a polinómica: se aplica la propiedad distributiva.

Polinómica a canónica: se buscan las coordenadas del vértice.
Canónica a polinómica: se desarrolla el cuadrado del binomio.

Forma factorizada
$y = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$

Forma canónica
$y = a \,.\, (x - x_v)^2 + y_v$

Factorizada a canónica: se buscan las coordenadas del vértice.
Canónica a factorizada: se iguala la ecuación a 0 (cero) y se buscan las raíces.

Propiedades de las raíces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{a}{a}\,x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

Reconstruyan la función de segundo grado cuyas raíces son $x_1 = -3$ y $x_2 = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} -3 + \frac{1}{2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{5}{2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ (-3) \,.\, \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-3}{2} \end{array}\right\} y = 2x^2 + 5x - 3$$

ACTIVIDADES

47. Distintas expresiones de la función cuadrática

Test de comprensión

57. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿De qué forma está escrita la función $g(x) = 2x \cdot (x + 8)$?

b. Una función cuadrática que no tiene raíces reales, ¿de qué forma se puede escribir?

c. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la función $f(x) = -3 \cdot (x - 4)^2 - 8$?

58. **Completen la tabla.**

Función	Forma en que está escrita	Información que se obtiene de la fórmula
$f(x) = -7 \cdot (x + 1) \cdot (x - 0{,}5)$		
$g(x) = (x + 4)^2 + 3$		
$h(x) = 3x^2 - x - 8$		
$i(x) = -5 \cdot (x - 2)^2 - 9$		
$j(x) = 4x \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$		
$k(x) = 7x^2 - 9x$		

59. **Encuentren lo pedido en cada caso.**

a. Las raíces de $y = 2 \cdot (x - 4)^2 - 50$.

b. El vértice de $y = 2 \cdot (x + 4) \cdot (x - 8)$.

c. La ordenada al origen de $y = 3x \cdot (x + 7)$.

d. Las raíces de $y = x^2 + 8x + 15$.

e. La ordenada al origen de $y = -(x + 2)^2 + 3$.

f. El vértice de $y = 3x^2 - 6x - 2$

g. Las raíces de $y = -2 \cdot (x + 6)^2 - 4$.

47. Distintas expresiones de la función cuadrática

60. Completen la tabla.

Forma canónica	Forma polinómica	Forma factorizada
$y = \frac{1}{2} . (x - 1)^2 - 8$		
	$y = -x^2 + 4x + 12$	
		$y = 3 . (x + 1) . (x - 3)$

61. Escriban la función cuadrática en la forma posible, según los datos dados en cada caso.

a. Tiene por vértice $v = (-4; 5)$ y pasa por el punto $(-3; 7)$.

b. Tiene por raíces $x_1 = -2$ y $x_2 = 5$ y pasa por el punto $\left(0; \frac{10}{3}\right)$.

62. Encuentren todos los elementos necesarios y grafiquen las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2 . (x - 1)^2 - 2$

b. $g(x) = -x^2 - 3x$

c. $h(x) = (x + 4) . (x - 4)$

d. $i(x) = -5x^2 + 5$

47. Distintas expresiones de la función cuadrática

63. Tengan en cuenta los datos de las funciones cuadráticas y escríbanlas en forma polinómica.

a. Vértice v = (1; 2) y pasa por p = (3; 4).

b. Raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$ y corta al eje "y" en −2.

c. Vértice v = (0; 8) y corta al eje "x" en 2.

d. Raíces $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$ y cumple que f(1) = 1.

e. Pasa por p = (−3; 0), q = (−1; 0) y r = (0; 2).

f. Vértice (−1; −4) y pasa por p = (1; −2).

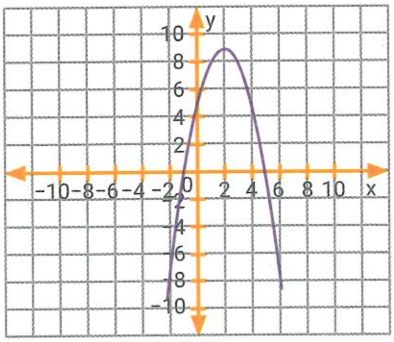
64. Escriban la fórmula de una función cuadrática aplicando las propiedades de las raíces.

a. $x_1 = 4$; $x_2 = -1$.

b. $x_1 = 0$; $x_2 = 7$.

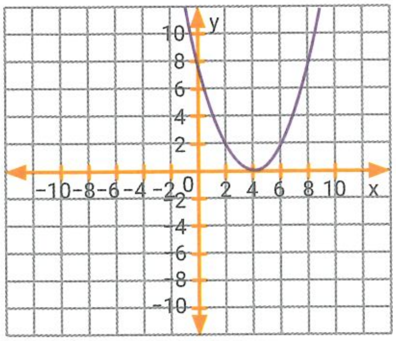
65. Observen los gráficos y escriban las funciones cuadráticas en la forma indicada.

a.



Forma factorizada:

b.



Forma canónica:

66. Completen la tabla.

Función	a	b	c	Raíces
$y = 4x^2 - 2x$				
$y = -5x^2 + x - 6$				
$y = 3x^2 - 9$	3	0	-9	
$y = x^2 + 9x + 14$	1	9	14	

67. Respondan.

a. ¿Las parábolas cortan siempre al eje x?

b. ¿Las parábolas cortan siempre al eje y?

c. ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de una parábola cuyo vértice es $(-3; 8)$?

d. ¿Puede el vértice ser la raíz de la parábola?

e. ¿Hacia dónde se dirigen las ramas de la parábola cuando $a > 0$?

f. ¿Puede el vértice ser el máximo de la función?

68. Calculen el valor de "m", teniendo en cuenta lo pedido en cada caso.

a. En la función $y = x^2 + mx - 4$, una raíz es -4.

b. En la función $y = -2x^2 - x + m$, las raíces son iguales.

c. En la función $y = mx^2 + 8x - 11$, la coordenada $x_v = 1$.

d. En la función $y = 5x^2 + 9x - m$, la ordenada al origen es -6.

69. Realicen el gráfico aproximado de una parábola que cumpla lo pedido en cada caso. Luego, indiquen si las gráficas posibles son únicas en cada caso.

a. $C_0 = \{-2; 4\}$ y $f(0) = 2$.

b. $v = (1; 1)$ y $C^- = \emptyset$.

c. $C^+ = (-4; -2)$ y el eje de simetría es $x = -3$.

d. $v = (0; -1)$ y $C_0 = \{-1; 1\}$.

70. Completen la tabla.

Forma polinómica	Forma canónica	Forma factorizada
$y = x^2 + 4x - 5$		
	$y = -2(x - 6)^2 + 2$	
		$y = -x(x + 8)$

71. Grafiquen las siguientes funciones cuadráticas e indiquen en cada caso las raíces, el vértice, la ordenada al origen y la imagen.

a. $f(x) = -2 . (x + 1) . (x - 6)$

b. $g(x) = x^2 + x - 6$

c. $h(x) = -4x . (x + 2)$

d. $i(x) = 0,5 . (x - 1)^2 - 2$

72. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen los casos falsos.

a. Las raíces de la función $y = 8 . (x + 1) . (x - 6)$ son 1 y − 6. ☐

b. El vértice de la función $y = (x + 9)^2$ es $v = (-9; 0)$. ☐

c. La parábola $y = 11x^2 + x + 5$ tiene dos raíces reales distintas. ☐

d. En la parábola $y = -2x^2 + 9$, el vértice es un mínimo. ☐

73. **Reconstruyan en cada caso la función cuadrática aplicando las propiedades de las raíces.**

a. $x_1 = -4;\ x_2 = \frac{1}{2}$

b. $x_1 = 0;\ x_2 = 5$

74. **Reconstruyan las fórmulas en las formas pedidas a partir de los datos dados.**

a. Forma canónica y polinómica.

"Las raíces son $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$ y pasa por el punto (1; −20)."

b. Forma factorizada y polinómica.

"El vértice es (0; 5) y pasa por el punto (−2; −15)."

c. Forma canónica y factorizada.

"Los coeficientes son a = 1 y b = 6, y la ordenada al origen es 9."

75. **Respondan.**

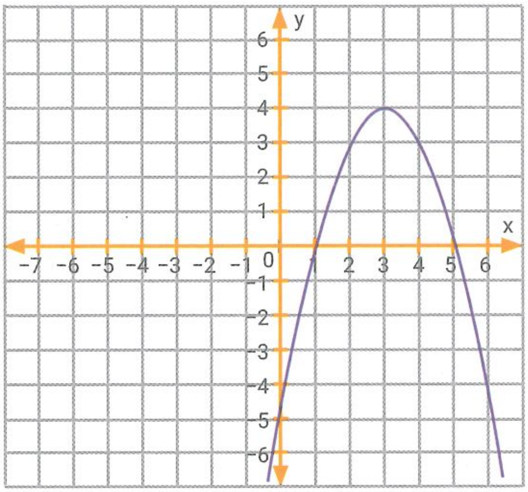
¿Es cierto que todas las funciones cuadráticas se pueden escribir en forma factorizada?

76. **Grafiquen las funciones y luego completen.**

Carac.	$y = -(x + 1)^2 + 9$	$y = x^2 + 3x + \frac{5}{4}$
C_0		
f(0)		
$(x_v; y_v)$		
Im		
Crec.		
Decrec.		
C^+		
C^-		

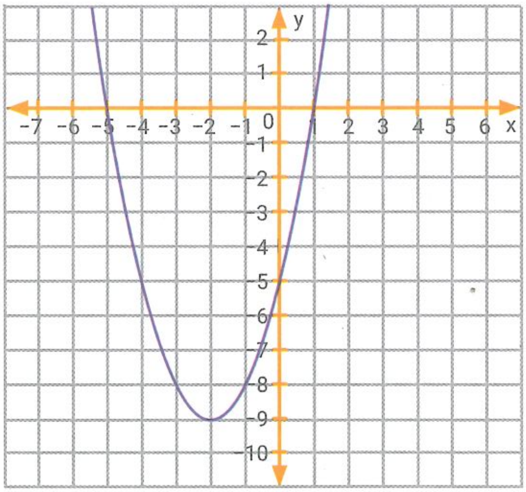
77. **Marquen con una X cuál es la fórmula que corresponde a cada función graficada.**

a.



- $y = -(x + 3)^2 + 4$ ☐
- $y = -(x - 3)^2 + 4$ ☐
- $y = (x - 3)^2 + 4$ ☐

b.



- $y = -(x + 5) . (x - 1)$ ☐
- $y = (x + 5) . (x - 1)$ ☐
- $y = (x - 5) . (x + 1)$ ☐

48. Estudio de funciones polinómicas

▶ SABERES DINÁMICOS

Para realizar el **gráfico aproximado** de una **función polinómica** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ se debe:

- Hallar la **ordenada al origen**, la que está determinada por el término independiente y es el punto $(0; a_0)$.
- **Factorizar el polinomio**.
- Encontrar las **raíces** (indican las intersecciones con el eje x).
- Tener en cuenta el **orden de multiplicidad de las raíces**: indica que la gráfica rebota (si es par) o atraviesa (si es impar) el eje x.
- Hallar los **conjuntos de positividad y negatividad**, para lo cual se buscan valores del dominio entre dos raíces consecutivas para determinar si la función es positiva o negativa en ese intervalo.

Realicen el gráfico aproximado de la función $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$.

- ***Ordenada al origen:** (0; 2)*
- ***Factorización del polinomio:***

$f(x) = (x + 2) . (x + 1) . (x - 1)^2$

- ***Intersecciones con el eje x:***

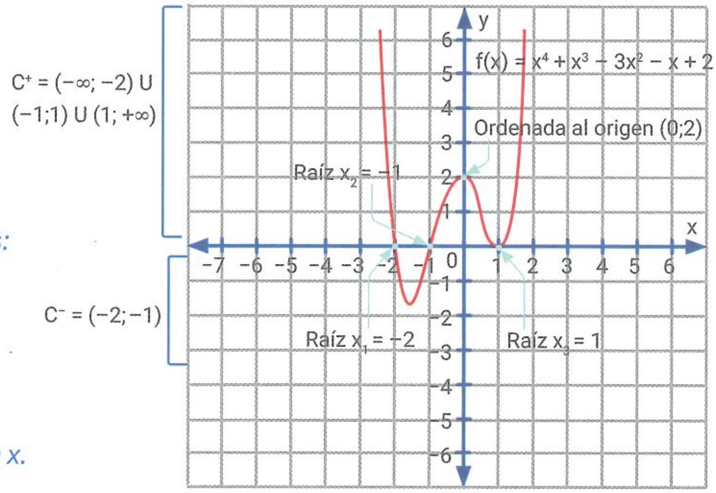
$C_0 = \{-2; -1; 1\}$

- ***Orden de multiplicidad de las raíces:***

−2 raíz simple ⇒ La gráfica atraviesa el eje x.

−1 raíz simple ⇒ La gráfica atraviesa el eje x.

1 raíz doble ⇒ La gráfica rebota el eje x.



- ***Conjunto de positividad y negatividad:***

Intervalo	(−∞; −2)	−2	(−2; −1)	−1	(−1; 1)	1	(1; +∞)
Valor de f(x) en un punto de prueba	*f(−3) = 32*	*0*	*f(−1,5) = −1,5625*	*0*	*f(0) = 2*	*0*	*f(2) = 12*
Signo de f(x)	*+*	*raíz*	*−*	*raíz*	*+*	*raíz*	*+*

$C^+ = (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$C^- = (-2; -1)$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/cpn* para mirar una explicación sobre cómo encontrar los conjuntos de positividad y de negatividad en funciones polinómicas.

*Enlace acortado de https://youtu.be/l-t5YNyanWO

48. Estudio de funciones polinómicas

Test de comprensión

78. Respondan y expliquen sus respuestas.

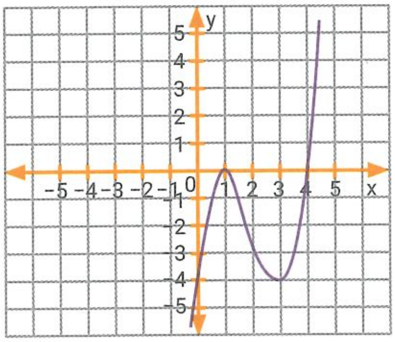
a. ¿Cuál es el valor de la imagen de f(a), si "a" es raíz del polinomio?

b. El conjunto de positividad C^+ de una función ¿está formado por todos los valores de "y" positivos?

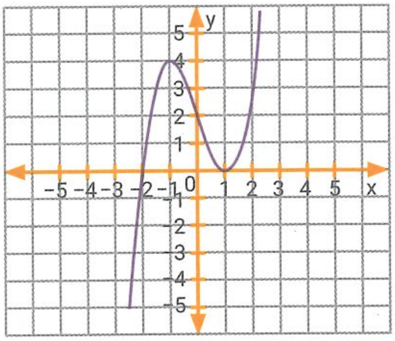
c. Si una función polinómica tiene raíces −2; 0 y 2, ¿qué valores de la función se pueden buscar para determinar los conjuntos de positividad y negatividad?

79. Observen los gráficos y completen con el ítem correspondiente en cada función.

a.

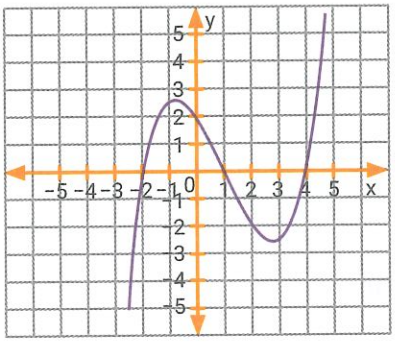


b.

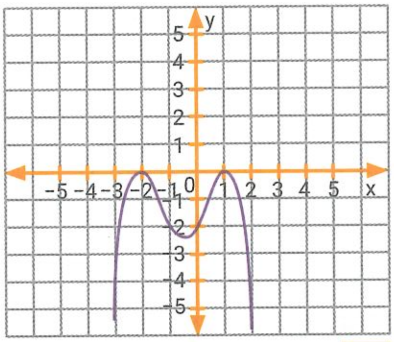


- $(x-1)^2 \cdot (x+2)$ ☐
- $\frac{1}{4} \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-4)$ ☐

c.



d.



- $(x-1)^2 \cdot (x-4)$ ☐
- $-\frac{1}{2} \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)^2$ ☐

80. Realicen el gráfico aproximado de las siguientes funciones polinómicas.

a. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

b. $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$

48. Estudio de funciones polinómicas

81. Realicen un gráfico aproximado de las siguientes funciones polinómicas a partir de sus elementos.

a. $y = x^3 - 3x + 2$

Ordenada al origen: ______

Raíces y orden de multiplicidad:

______

Conjunto de positividad:

______

Conjunto de negatividad:

______

b. $y = -x^3 + 2x^2 - x$

Ordenada al origen: ______

Raíces y orden de multiplicidad:

______

Conjunto de positividad:

______

Conjunto de negatividad:

______

c. $y = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

Ordenada al origen: ______

Raíces y orden de multiplicidad:

______

Conjunto de positividad:

______

Conjunto de negatividad:

______

d. $y = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

Ordenada al origen: ______

Raíces y orden de multiplicidad:

______

Conjunto de positividad:

______

Conjunto de negatividad:

______

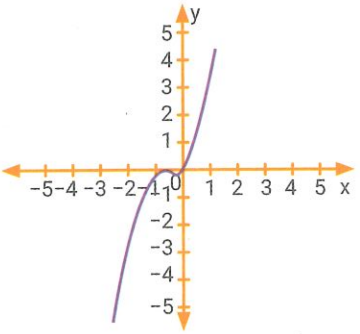
48. Estudio de funciones polinómicas

82. Completen la tabla.

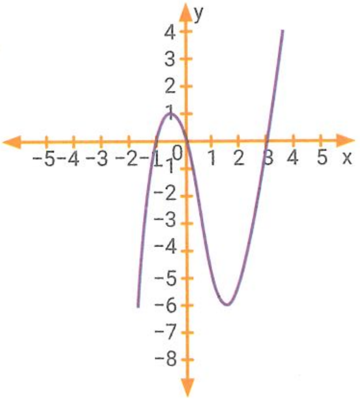
Función polinómica	Raíces	Conjunto de positividad	Conjunto de negatividad
$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 18$			
$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$			
$h(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$			
$i(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$			
$j(x) = x^6 - 2x^4 + x^2$			

83. Escriban la fórmula de la función polinómica de grado tres que corresponde a cada gráfico.

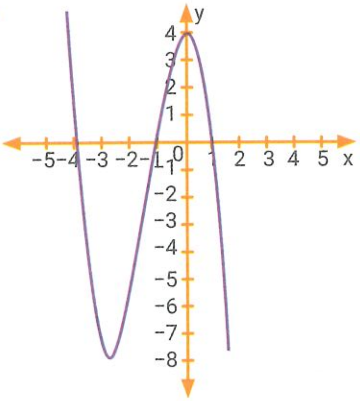
a.



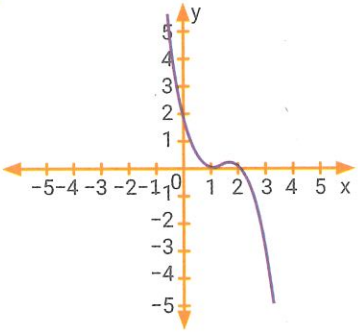
c.



b.



d.



DinámicaMente

Escriban la fórmula de una función polinómica de grado cinco, en la cual el conjunto de positividad es $C^+ = (-\infty; 1) \cup (1; 5)$ y la gráfica corta al eje y en 5.

49. Análisis de funciones

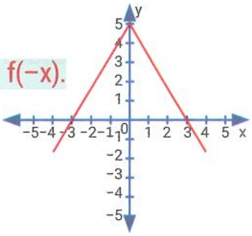
▶ SABERES DINÁMICOS

Para realizar el **estudio de una función**, se debe:

1. Definir su **dominio de validez (Dm)**.
2. Encontrar los puntos de intersección con los ejes cartesianos (**raíces** y **ordenada al origen**).
3. Analizar la **paridad**:

• Una función es **par** cuando para valores opuestos del dominio, sus imágenes son iguales.

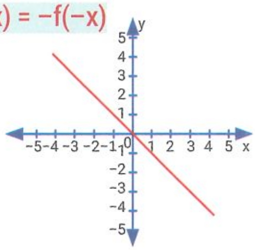
$f(x)$ es par $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$.



La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.

• Una función es **impar** cuando para valores opuestos del dominio, sus imágenes son opuestas.

$f(x)$ es impar $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$



La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Si una función no es par ni impar, entonces no tiene paridad.

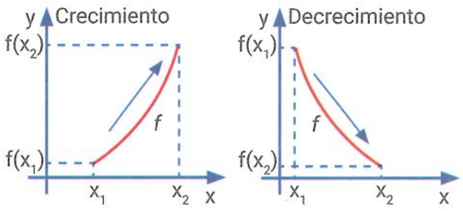
4. Encontrar los **intervalos de crecimiento** y **de decrecimiento**:

• Una función f(x) es **creciente** en un cierto intervalo de su dominio, cuando al aumentar los valores de su dominio, también aumentan los valores de sus imágenes.

$$f(x) \text{ es creciente} \Leftrightarrow x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

• Una función f(x) es **decreciente** en un cierto intervalo de su dominio, cuando al aumentar los valores de su dominio, disminuyen los valores de sus imágenes.

$$f(x) \text{ es decreciente} \Leftrightarrow x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



Si una función no crece ni decrece, entonces es constante.

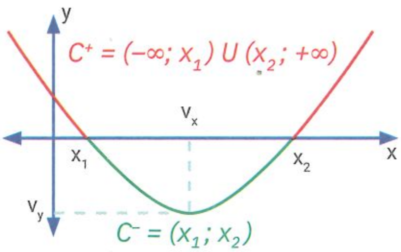
5. Analizar los **conjuntos de positividad (C^+)** y **negatividad (C^-)**:

• El **conjunto de positividad** está formado por todos los valores del dominio para los cuales sus imágenes son positivas.

$$x \in Dm \wedge f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in C^+.$$

• El **conjunto de negatividad** está formado por todos los valores del dominio para los cuales sus imágenes son negativas.

$$x \in Dm \wedge f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in C^-.$$



6. Encontrar **máximos** y **mínimos** de la función:

• El **máximo** es el punto de la gráfica donde la función pasa de ser creciente a decreciente.

• El **mínimo** es el punto de la gráfica donde la función pasa de ser decreciente a creciente.

Si la función tiene imágenes cuyos valores son mayores que el punto máximo, entonces se dice que es un máximo relativo. Si la función tiene imágenes cuyos valores son menores que el punto mínimo, entonces se dice que es un mínimo relativo.

Una función puede tener más de un máximo y mínimo relativo.

49. Análisis de funciones

Test de comprensión

84. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. El gráfico de una función pasa por los puntos (0; 1) y (8; 0). ¿Qué nombre reciben esos puntos?

b. ¿Puede una función ser par e impar al mismo tiempo?

c. Si una función crece de $(-\infty; 4)$ y decrece de $(4; +\infty)$, ¿tiene un mínimo en $x = 4$?

85. Encuentren para cada función los puntos de intersección con los ejes cartesianos.

a. $f(x) = 5x + 20$

b. $g(x) = |3x - 6| - 9$

c. $h(x) = -2 \,.\, (x + 4) \,.\, (x - 1)$

d. $r(x) = x^3 - 8$

86. Determinen analíticamente si las siguientes funciones son pares, impares o no tienen paridad.

a. $f(x) = 3x + 1$

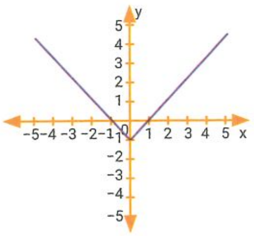
b. $g(x) = x^2 - 1$

c. $h(x) = -|x|$

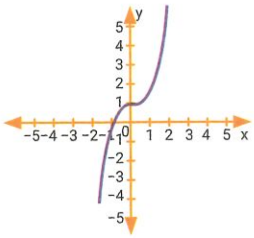
d. $i(x) = -x$

87. Indiquen si los siguientes gráficos corresponden a una función par, impar o no tienen paridad.

a.



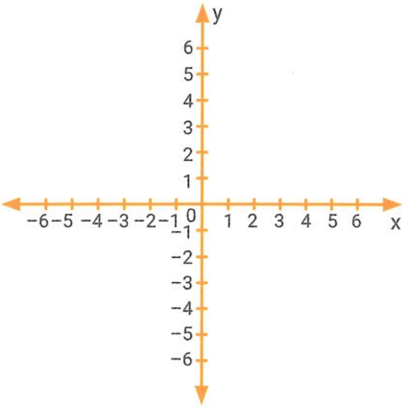
b.



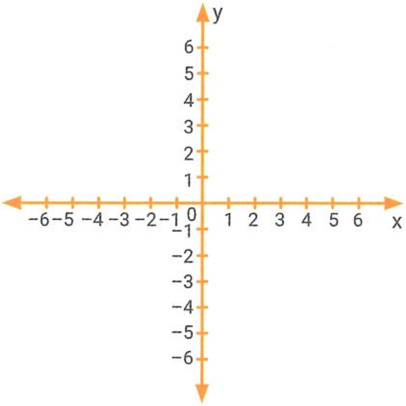
49. Análisis de funciones

88. Aproximen la gráfica de una función que cumpla lo pedido en cada caso.

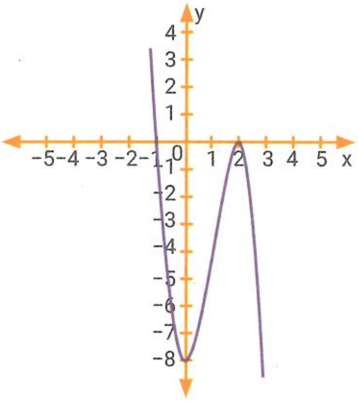
a. $f(0) = 3$ y $f(x)$ es par.



b. $C_0 = \{3; 5\}$ y $g(0) = -2$.



89. Observen el gráfico de la función f(x) y completen.



a. Conjunto de raíces C_0: ______

b. f(0): ______

c. Crecim.: ______

d. Decrecim.: ______

e. Máximo: ______

f. Mínimo: ______

90. Lean atentamente y completen según corresponda.

a. Si una función $f(x)$ crece en el intervalo $(-\infty; 5)$ y decrece en el intervalo $(5; +\infty)$, entonces en $f(5) = 7$ hay un ______.

b. Si una función $g(x)$ decrece en el intervalo $(-\infty; -3)$ y crece en el intervalo $(-3; +\infty)$, entonces en $g(-3) = 0$ hay un ______.

c. Si para todos los valores del dominio de una función $f(x)$ se cumple que $f(x) = -f(-x)$, entonces la función es ______.

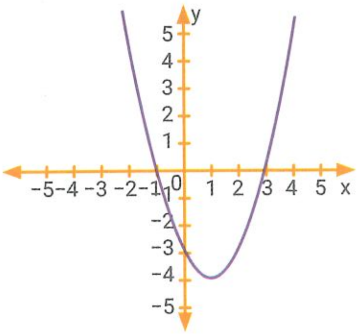
d. Si para todos los valores del dominio de una función $f(x)$ se cumple que $f(x) = f(-x)$, entonces la función es ______.

e. Si en una función $h(x)$ se cumple que $h(-1) = 0$, entonces $x = -1$ es una ______.

f. Si el punto $(0; -3)$ pertenece a la función $r(x)$, entonces ese punto es ______.

49. Análisis de funciones

91. Tengan en cuenta el gráfico y completen.



a. La función tiene un mínimo en: ____________________

b. La función crece en: ____________________

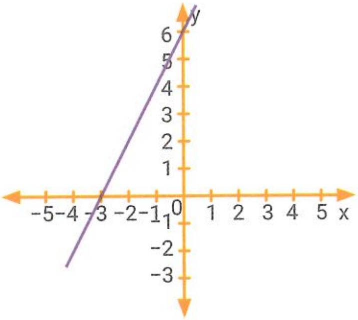
c. El conjunto imagen de la función es: ____________________

d. En el intervalo (−1; 3) la función es: ____________________

e. El domino de la función es: ____________________

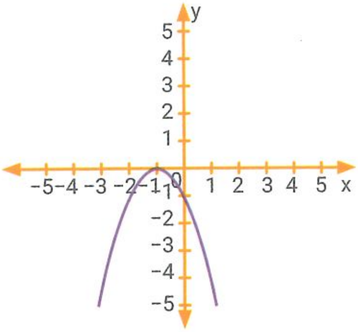
92. Indiquen la información pedida para cada gráfico.

a.



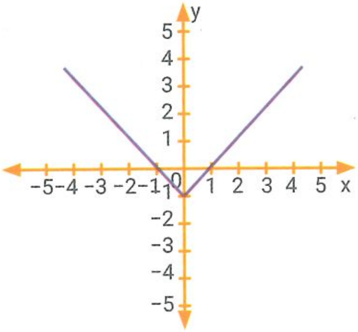
- Conjunto de raíces C_0: ____________________
- Ordenada al origen: ____________________
- Máximos y mínimos: ____________________
- Conjunto de positividad (C^+): ____________________
- Conjunto de negatividad (C^-): ____________________
- Conjunto imagen (Im): ____________________

b.



- Conjunto de raíces C_0: ____________________
- Ordenada al origen: ____________________
- Máximos y mínimos: ____________________
- Conjunto de positividad (C^+): ____________________
- Conjunto de negatividad (C^-): ____________________
- Conjunto imagen (Im): ____________________

c.



- Conjunto de raíces C_0: ____________________
- Ordenada al origen: ____________________
- Máximos y mínimos: ____________________
- Conjunto de positividad (C^+): ____________________
- Conjunto de negatividad (C^-): ____________________
- Conjunto imagen (Im): ____________________

49. Análisis de funciones

93. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si el conjunto de negatividad de una función es $(-\infty; 7)$ y el conjunto de positividad es $(7; +\infty)$, ¿tiene en $x = 7$ una raíz?

b. La función $f(x) = 2x^2 - 8$, ¿tiene al menos una raíz en el intervalo $(1; 3)$?

c. Si la función $h(x)$ no es par, ¿es impar?

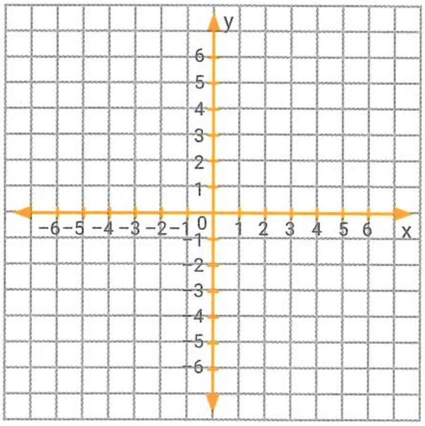
d. La función $g(x) = -3$, ¿es creciente?

e. La función lineal, ¿puede tener un mínimo?

f. La función cuadrática, ¿puede no tener ordenada al origen?

94. Gráfiquen funciones aproximadas según lo pedido e indiquen los conjuntos de positividad y de negatividad.

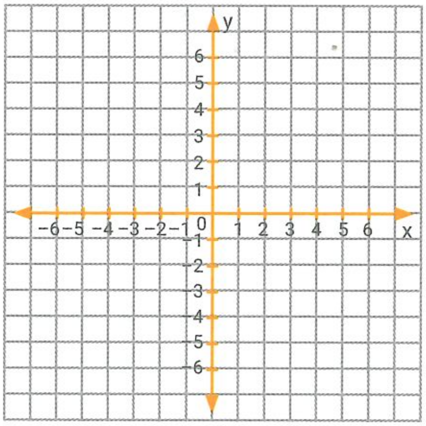
a. $C_0 = \{-2; 0; 2\}$, crecim. = $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.



$C^+ =$

$C^- =$

b. La raíz $x = 3$ es un máximo, crecim. = $(-\infty; 3)$.

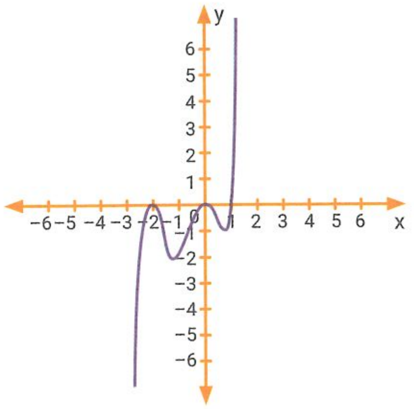


$C^+ =$

$C^- =$

49. Análisis de funciones

95. Observen el gráfico de la función y completen.



a. Dominio: ______________________

b. Raíces: ______________________

c. Ordenada al origen: ______________________

d. Paridad: ______________________

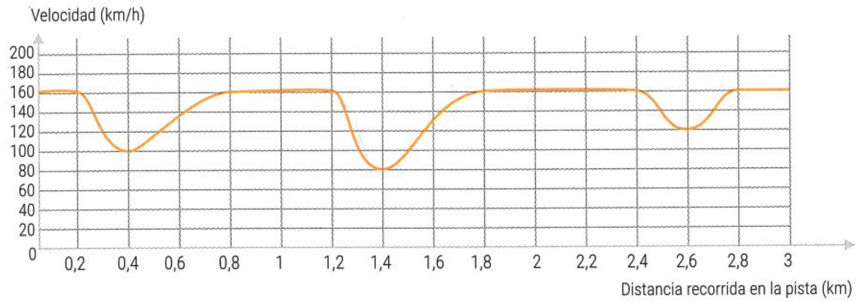
e. Máximos: ______________________

f. Positividad: ______________________

g. Imagen: ______________________

96. Lean atentamente, observen el gráfico y respondan.

El siguiente gráfico representa la variación de la velocidad de un auto de carrera a lo largo de una vuelta en una pista.



a. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el auto? ______________________

b. ¿En qué momentos aumenta la velocidad del auto? ______________________

c. ¿En qué momentos disminuye la velocidad del auto? ______________________

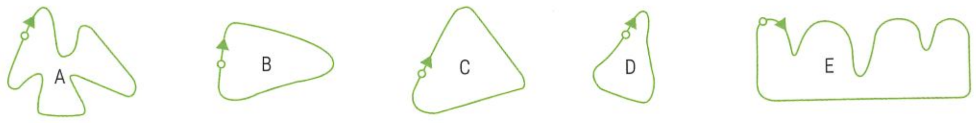
d. ¿En qué momentos mantiene la misma velocidad?

____

e. ¿Cuál es la distancia completa que se recorre en una vuelta? ______________________

f. ¿Cuál es la velocidad mínima que alcanza el auto? ¿A qué distancia del comienzo de la vuelta se llega a esa velocidad? ______________________

g. ¿En cuál de las siguientes pistas se desplazó el auto para producir el gráfico de velocidad?



____

97. Escriban las raíces de cada función.

a. $f(x) = -2 \,.\, (x - 1) \,.\, (x - 2) \,.\, (x + 3)$

b. $g(x) = x \,.\, (x - 5)^2 \,.\, (x + 1)$

c. $h(x) = 2 \,.\, (x - 2) \,.\, (x^2 + 1)$

d. $i(x) = -(x + 3)^2 \,.\, \left(x - \frac{1}{5}\right)$

e. $j(x) = (x - 5)^3 \,.\, (x^2 - 1) \,.\, (x^2 + 2)$

f. $k(x) = -(x - 3)^2 \,.\, (x^4 + 2x^2 + 1)$

98. Escriban las funciones polinómicas en su forma factorizada.

a. $f(x) = x^4 + 2x^3$

b. $g(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$

c. $h(x) = 3x^4 - 243$

d. $i(x) = 5x^4 + 15x^2 + 15$

e. $j(x) = 2x^3 + 12x^2 + 22x + 12$

f. $k(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

99. Marquen con una X las opciones correctas.

a. $f(x) = x^2 \,.\, (x - 1) \,.\, (x + 5)^3$

- -1 es raíz simple. ☐
- 0 es raíz doble. ☐
- 5 es raíz triple. ☐
- -5 es raíz triple. ☐

b. $g(x) = -2 \,.\, (x^2 + 4) \,.\, (x^2 - 1)$

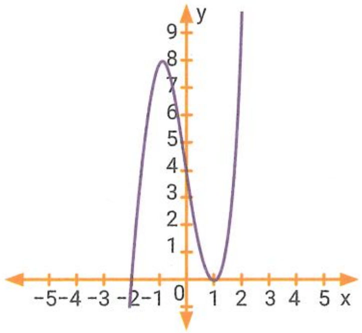
- -2 es raíz simple. ☐
- -2 es raíz doble. ☐
- 1 es raíz simple. ☐
- -1 es raíz simple. ☐

100. Escriban la fórmula de una función polinómica que cumpla con las siguientes condiciones.

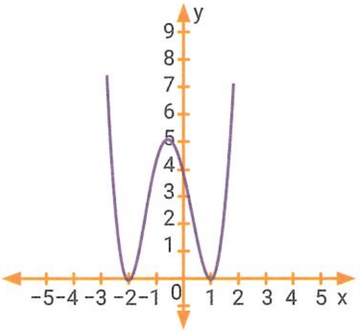
- $C^+ = (2; 3)$
- $C^- = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (3; +\infty)$
- $f(0) = -6$

101. Observen los gráficos y completen con el ítem correspondiente en cada función.

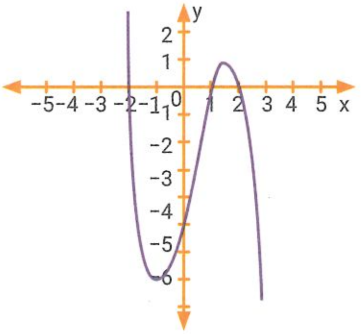
a.



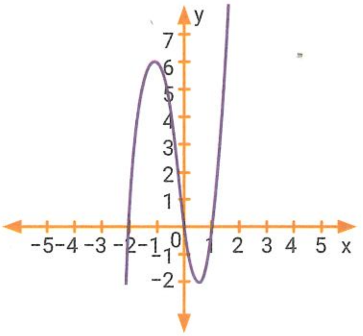
b.



c.



d.



- $y = (x - 1)^2 \,.\, (x + 2)^2$ ☐
- $y = -(x - 1) \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 2)$ ☐
- $y = 3x \,.\, (x - 1) \,.\, (x + 2)$ ☐
- $y = 2 \,.\, (x - 1)^2 \,.\, (x + 2)$ ☐

102. **Aproximen la gráfica de una función que cumpla lo pedido en cada caso.**

a. $C^+ = \emptyset$ y $C_0 = \{-3; 0; 3\}$.

b. $Im = [5;-\infty)$ y $C_0 = \{2; 4\}$.

c. Decrecimiento = $(-3; 0)$ y $f(0) = -2$.

d. $C^- = \mathbb{R}$ y máximo en $(1; -3)$.

103. **Escriban V (verdadero) o F (falso).**

a. Una función siempre es impar. ☐

b. Una función puede tener más de una raíz. ☐

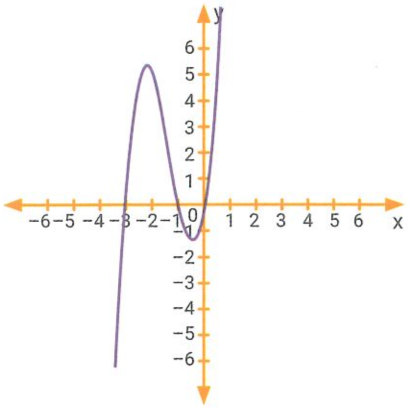
c. Una función puede tener $C^+ = \emptyset$. ☐

d. Una función puede tener dos ordenadas al origen. ☐

e. La gráfica de una función puede no cortar al eje de las abscisas. ☐

f. Si $f(8) = 3$, entonces el punto $(3; 8)$ pertenece a la gráfica de la función. ☐

104. **Observen el gráfico de la función g(x) y respondan.**



a. ¿Cuál es la ordenada al origen?

b. La función ¿tiene paridad?

c. ¿Cuáles son los ceros de la función?

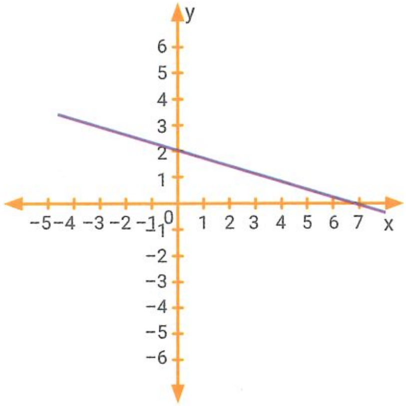
d. La función ¿tiene un máximo o mínimo?

e. ¿Cuál es la imagen de la función?

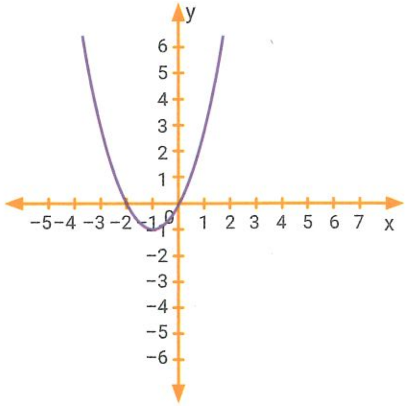
105. **Observen los gráficos y completen con lo pedido.**

- Raíces.
- Ordenada al origen.
- Paridad.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Conjuntos de positividad y de negatividad.
- Máximos y mínimos.
- Imagen.

a.



b.



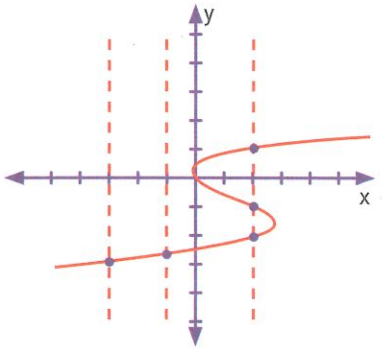
Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Funciones

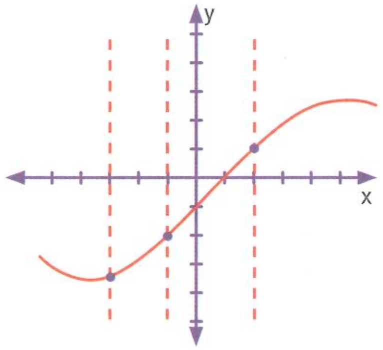
Para que una relación entre dos variables sea **función** se deben cumplir dos condiciones:

- **Unicidad**: a cada valor de la variable independiente le corresponde un **único** valor de la variable dependiente. Es decir, a un valor de "x" no le puede corresponder más de un valor de "y".

Para comprobar esta propiedad se pueden trazar rectas paralelas al eje "y". Si alguna de ellas corta a la gráfica en más de un punto, no se cumple la propiedad.



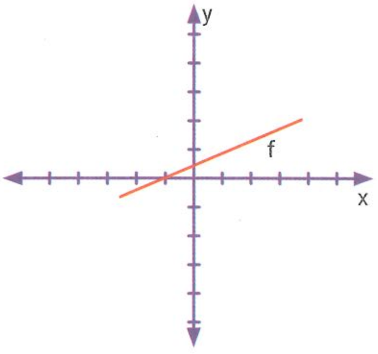
No cumple con la propiedad de unicidad.



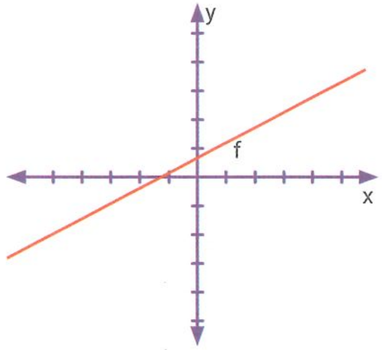
Cumple con la propiedad de unicidad.

- **Existencia**: a **todos** los valores del dominio les corresponde una imagen. Es decir, no pueden sobrar valores de "x" que no tengan imagen.

Por ejemplo, si Dm de f(x) = $\mathbb{R}$:



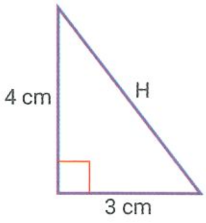
No cumple con la propiedad de existencia.



Cumple con la propiedad de existencia.

Propiedad pitagórica

En todo triángulo rectángulo, **el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos**.



$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$
$$H^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$$
$$H^2 = 3^2\text{ cm}^2 + 4^2\text{ cm}^2$$
$$H^2 = 9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2$$
$$H^2 = 25\text{ cm}^2$$
$$H = \sqrt{25\text{ cm}^2}$$
$$H = 5\text{ cm}$$

7 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

106. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la función $f(x) = -x^2 + 8$?

○ **a.** $f(-1) = 9$ ○ **b.** $f(-3) = 17$ ○ **c.** $f(8) = 0$ ○ **d.** $f(-1) = 7$

107. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (1; 3) y (−2; 6)?

○ **a.** $y = 3x - 1$ ○ **b.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ ○ **c.** $y = -x + 4$ ○ **d.** $y = x - 4$

108. ¿Cuál es la recta perpendicular a la recta $\frac{x}{2} + y = 1$?

○ **a.** $y = 2x + 7$ ○ **b.** $y = -2x + 9$ ○ **c.** $y = 0{,}5x - 1$ ○ **d.** $y = -\frac{1}{2}x$

109. ¿Cuál es la distancia entre el punto p = (1; 4) y el vértice de la parábola $y = (x - 3)^2 + 2$?

○ **a.** $4\sqrt{2}$ ○ **b.** $2\sqrt{2}$ ○ **c.** $\sqrt{52}$ ○ **d.** $2\sqrt{5}$

110. ¿Cuál es la distancia entre la raíz positiva de $y = (x + 9) \cdot (x - 1)$ y la recta $y + x = 9$?

○ **a.** $4\sqrt{2}$ ○ **b.** $5\sqrt{2}$ ○ **c.** $9\sqrt{2}$ ○ **d.** $\sqrt{2}$

111. ¿Cuáles son las raíces de la función $g(x) = -2 \cdot |4 - x| + 6$?

○ **a.** −8 y 6 ○ **b.** No tiene. ○ **c.** −2 y 14 ○ **d.** 1 y 7

112. ¿Cuál es la expresión polinómica de la función $f(x) = -2 \cdot (x + 4)^2 + 2$?

○ **a.** $f(x) = -2x^2 - 30$

○ **b.** $f(x) = -2 \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)$

○ **c.** $f(x) = x^2 + 16$

○ **d.** $f(x) = -2x^2 - 16x - 30$

113. ¿Cuál es el intervalo de crecimiento de la función $g(x) = x^2 - 2x - 3$?

○ **a.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

○ **b.** $(-4; +\infty)$

○ **c.** $(1; +\infty)$

○ **d.** $(-1; 3)$

8 Proporcionalidad y trigonometría

50. Teorema de Thales

▶ SABERES DINÁMICOS

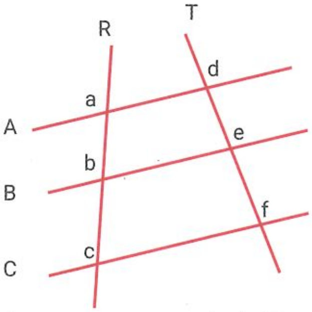
Teorema de Thales

El **teorema de Thales** dice que: "si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, la razón entre las medidas de los segmentos determinados en una de ellas es igual a la razón entre las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra".

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/tha * para observar cómo, al modificar la medida de los segmentos, se mantiene la proporción entre segmentos correspondientes.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/nJ2DFKy6



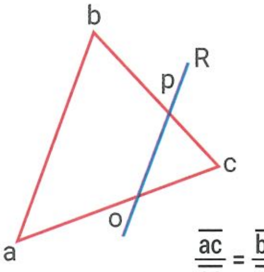
$A//B//C$; R y T son transversales.

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{de}}{\overline{ef}}$$

Al $\overline{ab}$ le corresponde $\overline{de}$ en la otra transversal (al $\overline{bc}$ le corresponde $\overline{ef}$). Se dice entonces que son **segmentos correspondientes**.

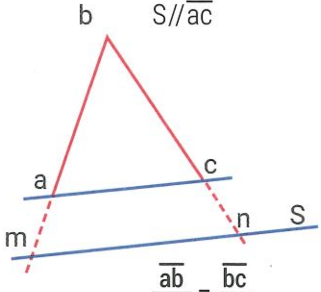
Como **consecuencia del teorema de Thales**, toda recta paralela al lado de un triángulo que corta a los otros dos lados o a sus prolongaciones determina sobre ellos segmentos proporcionales.

$R//\overline{ab}$



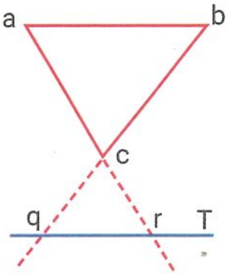
$$\frac{\overline{ac}}{\overline{oc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{pc}}$$

$S//\overline{ac}$



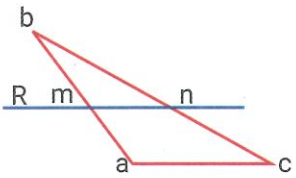
$$\frac{\overline{ab}}{\overline{am}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{cn}}$$

$T//\overline{ab}$



$$\frac{\overline{ac}}{\overline{cr}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{cq}}$$

Calculen el perímetro del triángulo abc teniendo en cuenta los datos.



$R//\overline{ac}$;

$\overline{bm} = 9$ cm; $\overline{ma} = 6$ cm; $\overline{nc} = 8$ cm;

$\overline{ac} = 10$ cm

Perímetro $= \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac}$

$\overline{ab} = \overline{bm} + \overline{ma} \Rightarrow \overline{ab} = 9\text{ cm} + 6\text{ cm} \Rightarrow \mathbf{\overline{ab} = 15\text{ cm}}$

$\overline{bc} = \overline{bn} + \overline{nc} \Rightarrow \frac{\overline{bm}}{\overline{ma}} = \frac{\overline{bn}}{\overline{nc}} \Rightarrow \frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{\overline{bn}}{8\text{ cm}} \Rightarrow \overline{bn}\,.\,6\text{ cm} = 9\text{ cm}\,.\,8\text{ cm} \Rightarrow \overline{bn} = 72\text{ cm}^2 : 6\text{ cm} \Rightarrow$

$\mathbf{\overline{bn} = 12\text{ cm}} \Rightarrow \overline{bc} = 12\text{ cm} + 8\text{ cm} \Rightarrow \mathbf{\overline{bc} = 20\text{ cm}}$

Perímetro $= 15\text{ cm} + 20\text{ cm} + 10\text{ cm} = \mathbf{45\text{ cm}}$

ACTIVIDADES

50. Teorema de Thales

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

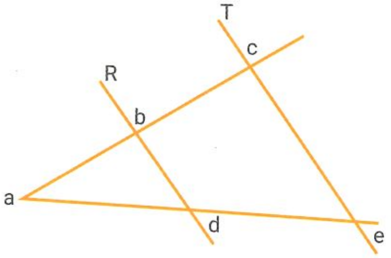
a. Si $\overline{ab}$ = 5 cm y $\overline{bc}$ = 4 cm, ¿es cierto que la razón entre ellos es 0,8?

b. Si $\overline{mn}$ = 2,5 cm y la razón entre $\overline{mn}$ y $\overline{pq}$ es 2, ¿cuál es la medida de $\overline{pq}$?

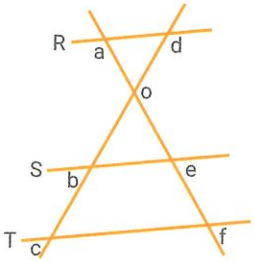
c. Tracen tres rectas paralelas y dos rectas transversales a ellas, indiquen los segmentos determinados en cada una de las secantes y armen todas las proporciones posibles según el teorema de Thales.

2. Calculen las incógnitas en cada caso y las medidas de cada uno de los segmentos.

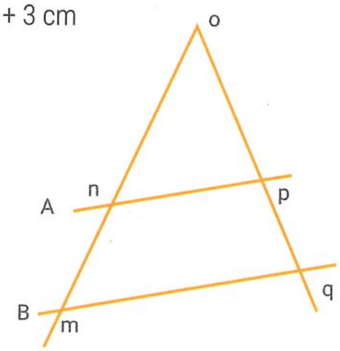
a. R // T; $\overline{ab}$ = 3 cm; $\overline{ad}$ = 9 cm; $\overline{de}$ = 15 cm; $\overline{bc}$ = x



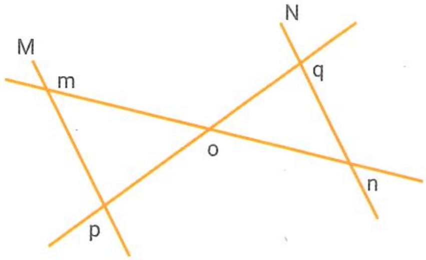
c. R // S // T; $\overline{ef}$ = 6 cm; $\overline{bc}$ = 15 cm; $\overline{ao}$ = x; $\overline{do}$ = 2x + 2 cm; $\overline{bo}$ = x − 2 cm



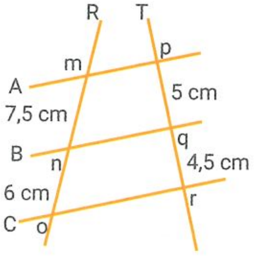
b. A // B; $\overline{no}$ = 8 cm; $\overline{po}$ = 10 cm; $\overline{pq}$ = 5 cm; $\overline{mn}$ = x + 3 cm



d. M // N; $\overline{mo}$ = x + 1 cm; $\overline{on}$ = 7 cm − x; $\overline{po}$ = x − 2 cm; $\overline{oq}$ = 4 cm − x



3. Observen la figura y determinen si las rectas A, B y C son paralelas. Expliquen la respuesta.

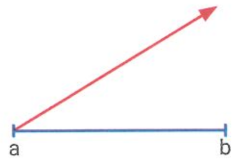
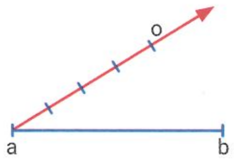
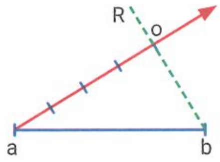
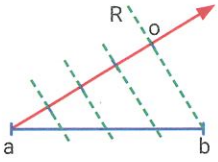


51. Aplicaciones del teorema de Thales

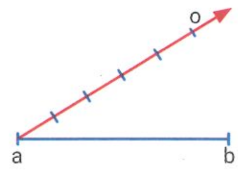
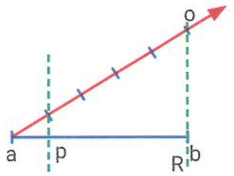
▶ SABERES DINÁMICOS

El **teorema de Thales** tiene distintas **aplicaciones**.

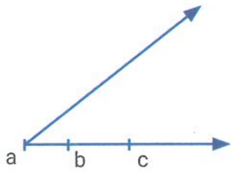
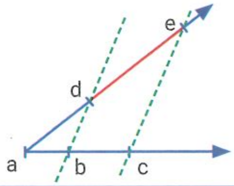
- Se puede dividir un segmento ab en cuatro segmentos congruentes.

1. Se traza una semirrecta con origen en el extremo "a" del segmento y que no incluya al punto "b".	2. Se marcan sobre la semirrecta cuatro segmentos congruentes de cualquier medida y el punto "o" al final.	3. Se traza la recta R determinada por los puntos "o" y "b".	4. Se trazan rectas paralelas a R que pasen por los otros puntos que se marcaron sobre $\overrightarrow{ao}$.
			

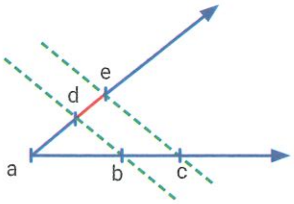
- Se puede dividir un segmento ab en dos partes conociendo la razón "r" entre las partes.

1. Se traza una semirrecta con origen en el extremo "a" del segmento que se quiere dividir en dos partes de razón, por ejemplo, $\frac{1}{4}$.	2. Se marcan sobre la semirrecta, en este caso, cinco segmentos congruentes de cualquier medida y el punto "o" al final.	3. Se traza la recta R determinada por los puntos "o" y "b".	4. Se traza la recta paralela a R que pasa por el primer punto marcado sobre $\overrightarrow{ao}$ y se determina "p" en $\overrightarrow{ab}$.
			$\frac{\overline{ap}}{\overline{pb}} = \frac{1}{4}$

- Se puede encontrar el **cuarto proporcional $\overline{de}$**.

1. Se trazan dos semirrectas con el origen en común.	2. Se marcan sobre una de las semirrectas dos de los segmentos ($\overline{ab}$ y $\overline{bc}$).	3. Sobre la otra semirrecta se marca el tercer segmento ($\overline{ad}$) a partir del origen.	4. Se traza la recta determinada por "d" y "b" y luego, la paralela que pasa por "c".
	$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{de}}$		$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{de}}$

- Si $\overline{bc} = \overline{ad}$, en la proporción $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{de}}$, **$\overline{de}$ es el tercero proporcional**.



$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{de}} \wedge \overline{bc} = \overline{ad}$$

51. Aplicaciones del teorema de Thales

Test de comprensión

4. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Si las partes en que se divide un segmento son iguales, ¿cuál es la razón entre ellos?

b. ¿Se puede construir el cuarto proporcional conociendo solamente dos medidas?

c. ¿Es cierto que si la razón entre $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ es 0,5, el tercero proporcional es igual a $4\overline{ab}$?

5. Rodeen el valor de la medida del cuarto proporcional en cada caso.

a. $\overline{ab}$ = 2,25 cm; $\overline{bc}$ = 1,25 cm; $\overline{ad}$ = 6,75 cm
- $\overline{de}$ = 3,75 cm
- $\overline{de}$ = 0,55 cm
- $\overline{de}$ = 3 cm

b. $\overline{ab}$ = 1,2 cm; $\overline{bc}$ = 3 cm; $\overline{ad}$ = 1,8 cm
- $\overline{de}$ = 0,4 cm
- $\overline{de}$ = 4,5 cm
- $\overline{de}$ = 2,5 cm

c. $\overline{ab} = \sqrt{2}$ cm; $\overline{bc} = \sqrt{5}$ cm; $\overline{ad} = \sqrt{10}$ cm
- $\overline{de} = \sqrt{5}$ cm
- $\overline{de}$ = 5 cm
- $\overline{de} = \sqrt{2}$ cm

6. Completen la tabla con la medida del tercero proporcional.

Segmentos	Tercero proporcional
$\overline{ab}$ = 2 cm; $\overline{bc}$ = 3 cm	
$\overline{ab}$ = 7,2 cm; $\overline{bc}$ = 6 cm	
$\overline{ab} = \sqrt{32}$ cm; $\overline{bc} = \sqrt{8}$ cm	

7. Dividan los siguientes segmentos, según lo indicado en cada caso.

a. En dos segmentos congruentes.

c. En cuatro segmentos congruentes.

b. En tres segmentos congruentes.

d. En cinco segmentos congruentes.

8. Tracen en sus carpetas un segmento $\overline{ab}$ de 8 cm y divídanlo en 3 partes, de manera tal que la razón entre la primera y la segunda parte sea $\frac{1}{2}$, y la razón entre la segunda y la tercera sea $\frac{2}{5}$. Luego, escriban el valor de la medida de cada una de las partes.

51. Aplicaciones del teorema de Thales

9. Tracen los segmentos pedidos en cada caso e indiquen las medidas de cada uno de los segmentos en los que quedan divididos.

a. Un segmento de 6 cm y divídanlo en dos segmentos, de manera tal que su razón sea $\frac{1}{4}$.

b. Un segmento de 5,5 cm y divídanlo en dos segmentos, de manera tal que su razón sea $\frac{3}{2}$.

c. Un segmento de 5 cm y divídanlo en dos segmentos, de manera tal que la medida del segundo sea el 25% de la medida del primero.

d. Un segmento de 8,1 cm y divídanlo en dos segmentos, de manera tal que la medida del primero sea el doble que la del segundo.

51. Aplicaciones del teorema de Thales

10. Tracen el segmento cuarto proporcional en cada caso. Luego, calculen la medida de ese segmento.

a. $\overline{ab}$ = 2 cm; $\overline{bc}$ = 2,5 cm; $\overline{ad}$ = 2,4 cm

c. $\overline{ab}$ = 1,5 cm; $\overline{bc}$ = 2 cm; $\overline{ad}$ = 2,25 cm

b. $\overline{ab}$ = 1,2 cm; $\overline{bc}$ = 1,5 cm; $\overline{ad}$ = 3 cm

d. $\overline{ab}$ = 3,2 cm; $\overline{bc}$ = 2,4 cm; $\overline{ad}$ = 3,6 cm

11. Tracen el segmento tercero proporcional en cada caso. Luego, calculen la medida de ese segmento.

a. $\overline{ab}$ = 3 cm; $\overline{bc}$ = 2 cm

c. $\overline{ab}$ = 4,5 cm; $\overline{bc}$ = 1,5 cm

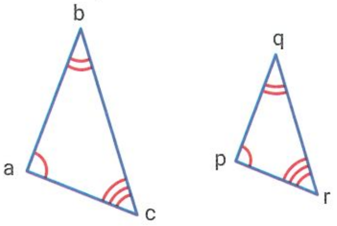
b. $\overline{ab}$ = 2,5 cm; $\overline{bc}$ = 1,5 cm

d. $\overline{ab}$ = 4 cm; $\overline{bc}$ = 2 cm

52. Semejanza de triángulos y de otras figuras

▶ SABERES DINÁMICOS

Dos triángulos son **semejantes** cuando los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos, congruentes.



En los triángulos semejantes, los lados correspondientes se oponen a ángulos congruentes.

$\hat{a} = \hat{p}$, entonces $\overline{bc}$ se corresponde con $\overline{qr}$.

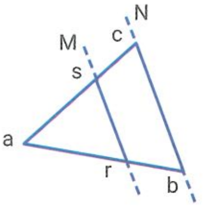
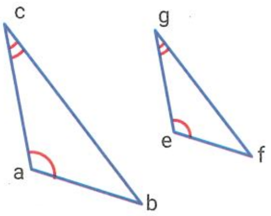
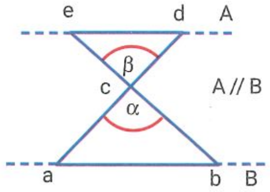
$\hat{b} = \hat{q}$, entonces $\overline{ac}$ se corresponde con $\overline{pr}$.

$\hat{c} = \hat{r}$, entonces $\overline{ab}$ se corresponde con $\overline{pq}$.

$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{pqr} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{p};\ \hat{b} = \hat{q};\ \hat{c} = \hat{r} \wedge \frac{\overline{bc}}{\overline{qr}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{pr}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{pq}} = k \leftarrow$ razón de semejanza.

La constante que se obtiene al dividir las medidas de los lados correspondientes se denomina **razón de semejanza**.

Criterios de semejanza de triángulos

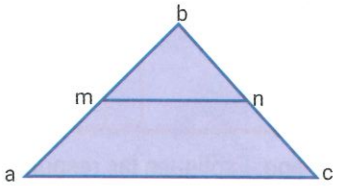
LLL	AA	LAL
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales. M // N  $\frac{\overline{ab}}{\overline{ar}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{as}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{rs}} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{ars}$	Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.  $\hat{a} = \hat{e} \wedge \hat{c} = \hat{g} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{efg}$	Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruentes. A // B  $\frac{\overline{ec}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{ca}} \wedge \hat{\alpha} = \hat{\beta} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{cde}$

Se llama **base media** al segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo.

$\overline{mn}$: base media de $\overset{\triangle}{abc}$.

$\overline{mn} \,//\, \overline{ac}$

$2 \,.\, \overline{mn} = \overline{ac}$



$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{mbn}$

$\frac{\overline{ab}}{\overline{mb}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bn}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{mn}}$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/trise * para observar cómo, al modificar las medidas de triángulos semejantes, se mantiene la proporción entre los lados correspondientes y la igualdad en la medida de los ángulos correspondientes.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/WThkX8W7

En todo triángulo, cada base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.

ACTIVIDADES

52. Semejanza de triángulos y de otras figuras

Test de comprensión

12. Respondan y expliquen sus respuestas.

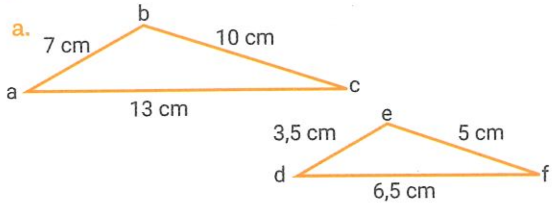
a. Si dos figuras son congruentes, ¿son semejantes?

b. Dos triángulos equiláteros, ¿siempre son semejantes?

c. Confeccionen una tabla con los criterios de semejanzas para triángulos rectángulos.

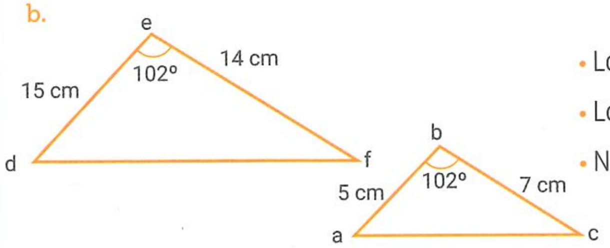
13. Tengan en cuenta los pares de triángulos y marquen con una X la opción correcta en cada caso.

a.



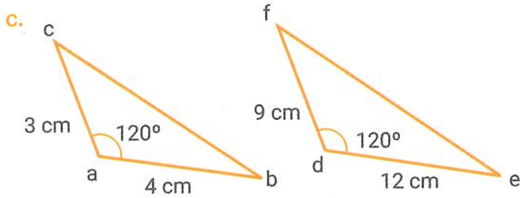
- Los triángulos son semejantes. ☐
- Los triángulos no son semejantes. ☐
- Los triángulos son congruentes. ☐

b.



- Los triángulos son semejantes. ☐
- Los triángulos no son semejantes. ☐
- No se puede saber sin la medida del tercer lado. ☐

c.



- Los triángulos son semejantes. ☐
- Los triángulos no son semejantes. ☐
- No se puede saber sin la medida del tercer lado. ☐

14. Completen la tabla con lo pedido para los triángulos abc y mno.

Datos	Semejantes	Criterio utilizado
$\overline{ab} = 5$ cm; $\overline{bc} = 8$ cm; $\hat{b} = 85°$ $\overline{mn} = 1{,}25$ cm; $\overline{no} = 2$ cm; $\hat{m} = 85°$		
$\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{mno}$ son rectángulos; $\hat{a} = 60°$; $\hat{o} = 30°$		
$\overline{ab} = 4$ cm; $\overline{bc} = 6$ cm; $\overline{ac} = 7$ cm $\overline{mn} = 3{,}2$ cm; $\overline{no} = 4{,}8$ cm; $\overline{mo} = 5{,}8$ cm		
$\overline{ab} = 1{,}25$ cm; $\overline{bc} = 0{,}75$ cm; $\overline{ac} = 1{,}5$ cm $\overline{mn} = 5$ cm; $\overline{no} = 3$ cm; $\overline{mo} = 6$ cm		

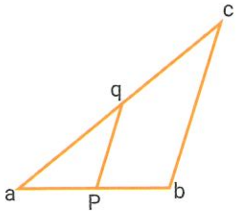
15. Determinen los perímetros de los triángulos abc y apq. Expliquen las respuestas.

$\overline{ac} = 23$ cm $\quad \overline{pq} \parallel \overline{bc}$

$\overline{ap} = 5$ cm

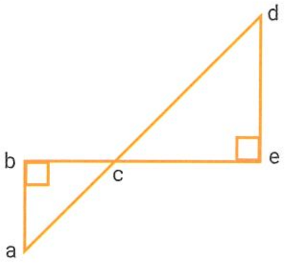
$\overline{ab} = 12{,}5$ cm

$\overline{pq} = 6$ cm

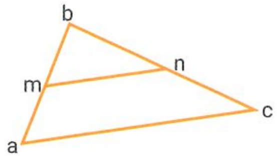


16. Indiquen en cada caso si los triángulos son semejantes. En caso de que lo sean, escriban los ángulos congruentes y los lados correspondientes. Expliquen las respuestas indicando el criterio utilizado.

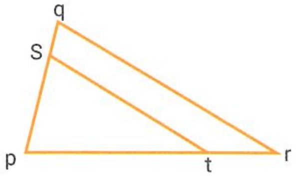
a. $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{cde}$



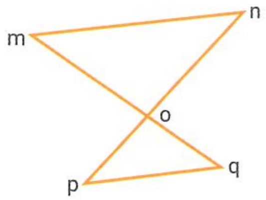
c. $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{mbn}$ $\overline{mn}$ es base media.



b. $\overset{\triangle}{pqr}$ y $\overset{\triangle}{pst}$ $\overline{qr} \parallel \overline{st}$



d. $\overset{\triangle}{mon}$ y $\overset{\triangle}{poq}$ $\overline{mn} \parallel \overline{pq}$

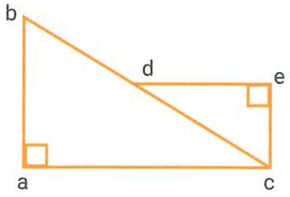


17. Calculen los valores de "x" e "y" en cada caso.

a. $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{dec}$;

$\overline{ab} = 3x$ cm; $\overline{ac} = 5x - 2$ cm; $\overline{ec} = 3$ cm

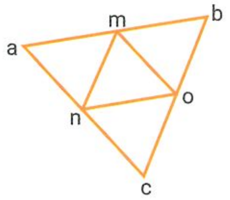
$\overline{ed} = 4$ cm; $\overline{bc} = 2y + 2$ cm; $\overline{dc} = 5$ cm



b. $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{mno}$ m, n y o son puntos medios.

$\overline{ab} = 3x - 1$ cm; $\overline{bc} = 2x + 1$ cm; $\overline{ac} = 10$ cm

$\overline{mo} = 4y - 1$ cm; $\overline{no} = 4$ cm; $\overline{mn} = 3{,}5$ cm



52. Semejanza de triángulos y de otras figuras

18. Planteen cada situación problemática y resuelvan.

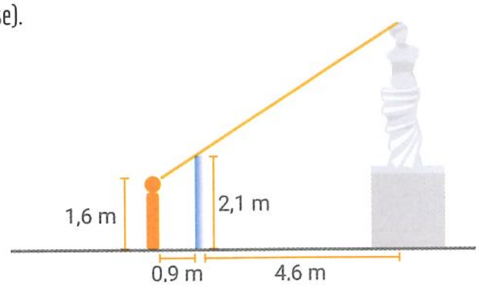
a. En un determinado momento del día un semáforo de 2 m de alto proyecta una sombra de 10 m y un edificio que se encuentra detrás del semáforo proyecta una sombra de 80 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

b. Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm por 2,5 cm. Se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm y que se conserve la semejanza entre las imágenes. ¿Cuál será la medida del lado menor de la nueva fotografía?

c. Para armar una carpa de circo se colocan postes. De la parte superior de cada poste salen dos cables: uno con un ángulo de 30° hasta llegar al piso a una distancia de 4,041 m de la base del poste y otro con un ángulo de 60° hasta llegar al piso a una distancia de 12,121 m. ¿Cuál es la altura de cada poste?

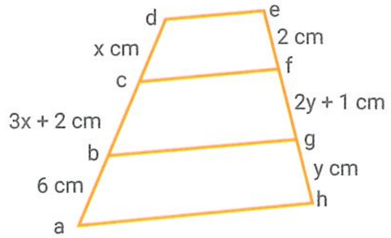
DinámicaMente

Observen la imagen y calculen la altura de la estatua (considerando su base).

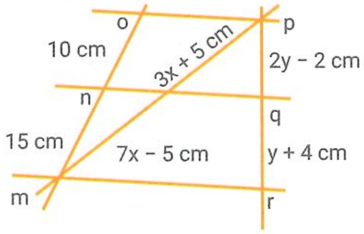


19. **Calculen el valor de las incógnitas y la medida de cada segmento.**

a. $\overline{de}$ // $\overline{cf}$ // $\overline{bg}$ // $\overline{ah}$

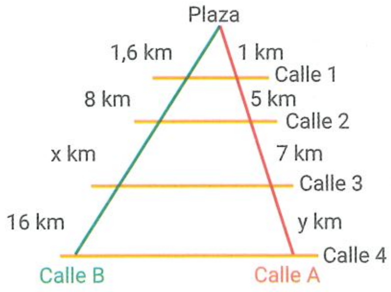


b. $\overline{op}$ // $\overline{nq}$ // $\overline{mr}$

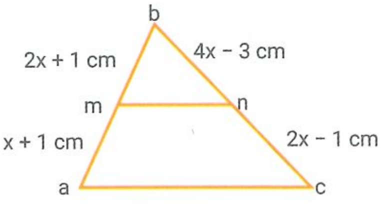


20. **Lean atentamente y resuelvan.**

En un pueblo se quieren repavimentar las dos calles principales (A y B) que desembocan en la plaza del pueblo. Las calles 1, 2, 3 y 4 son paralelas. Calculen el costo de los materiales sabiendo que el valor por km lineal de pavimento es de $12 500.



21. **Determinen el valor de "x" para que los segmentos $\overline{mn}$ y $\overline{ac}$ sean paralelos. Indiquen si es cierto que $\overline{mn}$ es la base media del triángulo abc.**



22. **Tracen los segmentos indicados.**

a. Un segmento de 5 cm dividido en cuatro partes congruentes.

b. Un segmento de 9 cm dividido en cinco partes congruentes.

c. Un segmento de 6 cm dividido en dos partes cuya razón de proporcionalidad sea 5.

d. Un segmento de 9 cm dividido en tres partes proporcionales a 2, 3 y 5, respectivamente.

e. Un segmento de 10 cm dividido en tres partes, tales que la primera es el doble de la segunda y la tercera, el doble de la segunda.

23. **Tracen el segmento $\overline{ab}$ y ubiquen el punto "m" según lo pedido en cada caso.**

a. $\overline{ab} = 4$ cm y $\overline{am} = \frac{1}{4}\,\overline{ab}$

b. $\overline{ab} = 5$ cm y $\overline{am} = \frac{1}{2}\,\overline{bm}$

c. $\overline{ab} = 5{,}5$ cm y $\overline{am} = 3\,\overline{mb}$

d. $\overline{ab} = 6$ cm y $\overline{am} = \frac{1}{3}\,\overline{ab}$

e. $\overline{ab} = 7$ cm y $\overline{am} = \frac{3}{4}\,\overline{mb}$

24. **Obtengan en cada caso el tercero proporcional, analítica y gráficamente.**

a. $\overline{ab} = 5$ cm; $\overline{bc} = 4$ cm

b. $\overline{op} = 3$ cm; $\overline{pq} = 6$ cm

c. $\overline{bc} = 6$ cm; $\overline{cd} = 3$ cm

d. $\overline{de} = 4{,}8$ cm; $\overline{ef} = 3$ cm

e. $\overline{uv} = 7$ cm; $\overline{vw} = 4{,}2$ cm

25. **Obtengan en cada caso el cuarto proporcional, analítica y gráficamente.**

a. $\overline{ab} = 5$ cm; $\overline{bc} = 4$ cm; $\overline{ad} = 3$ cm

b. $\overline{mn} = 4$ cm; $\overline{no} = 2{,}5$; mp = 8 cm

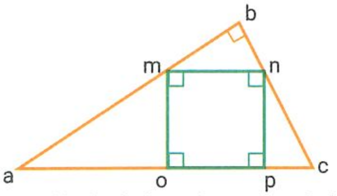
c. $\overline{rs} = 2{,}5$; $\overline{st} = 3$ cm; $\overline{rp} = 4{,}5$ cm

d. $\overline{cd} = 3$ cm; $\overline{de} = 1$ cm; $\overline{ce} = 6$ cm

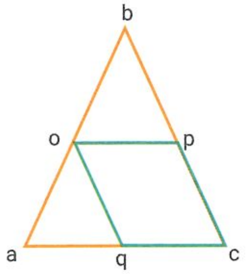
e. $\overline{pq} = 2{,}5$ cm; $\overline{qr} = 2$ cm; $\overline{ps} = 6$ cm

26. **Calculen el área del cuadrado mnpo si el triángulo abc es rectángulo en b.**

$\overline{ao}$ = 9 cm; $\overline{pc}$ = 4 cm



27. **Calculen el lado del rombo cpoq si el triángulo abc es isósceles y $\overline{ab}$ = $\overline{bc}$ = 12 cm y $\overline{ac}$ = 6 cm.**

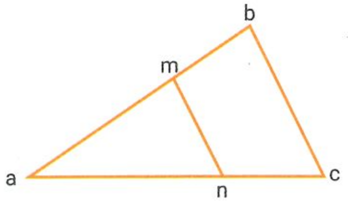


28. **Determinen si los triángulos que se indican en cada caso son semejantes. Expliquen la respuesta e indiquen el valor de la incógnita para que lo sean y su razón de semejanza.**

a. $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{amn}$; $\overline{mn}$ // $\overline{bc}$

$\overline{ab}$ = 3x − 4 cm; $\overline{ac}$ = 2x + 6 cm; $\overline{bc}$ = 2x cm;

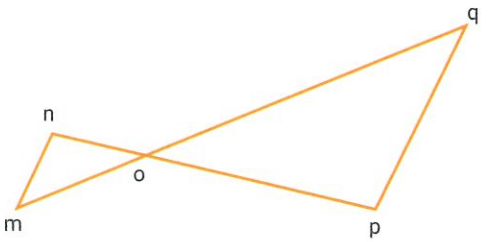
$\overline{am}$ = 10,5 cm; $\overline{an}$ = 13,5 cm; $\overline{mn}$ = 9 cm.



b. $\overset{\triangle}{opq}$ y $\overset{\triangle}{mno}$; $\overline{pq}$ // $\overline{mn}$

$\overline{op}$ = 4x + 1 cm; $\overline{oq}$ = 6x − 1 cm; $\overline{pq}$ = 2x + 11 cm;

$\overline{mn}$ = 3,6 cm; $\overline{mo}$ = 4 cm; $\overline{no}$ = 3 cm.



29. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**

a. Un triángulo que tiene un ángulo de 30° y otro de 40°, es semejante a otro triángulo que tiene un ángulo de 30° y otro de 110°. ☐

b. Un triángulo de lados 3 cm, 6 cm y 7 cm es semejante a otro cuyos lados miden 9 cm, 36 cm y 49 cm, respectivamente. ☐

c. Un triángulo que tiene un ángulo de 20° comprendido entre dos lados de 6 cm y 15 cm es semejante a otro triángulo cuyo ángulo de 20° está comprendido entre dos lados de 4 cm y 10 cm, respectivamente. ☐

30. **Marquen con una X la respuesta correcta en cada caso.**

a. La razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes es:

- la inversa de su razón de semejanza. ☐
- igual al cuadrado de su razón de semejanza. ☐
- igual a su razón de semejanza. ☐

b. La razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es:

- la inversa de su razón de semejanza. ☐
- igual al cuadrado de su razón de semejanza. ☐
- igual a su razón de semejanza. ☐

31. **Resuelvan.**

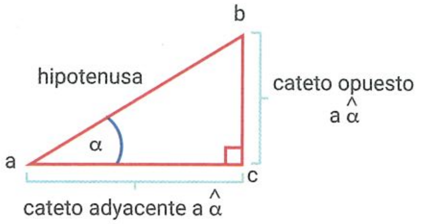
a. Un rectángulo mide 6 cm de base y 3 cm de altura. Calculen el área y las dimensiones de otro rectángulo semejante al anterior sabiendo que la razón entre sus áreas es $\frac{9}{4}$.

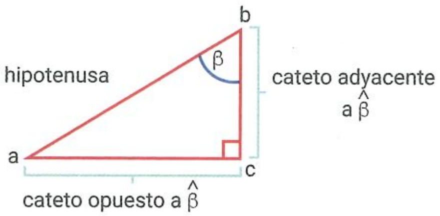
b. Una antena de comunicaciones mide 30 m de altura. En un determinado momento del día, un poste vertical (que está al lado de la antena) de 2 m de altura proyecta una sombra de 2,5 m. ¿Cuánto medirá la sombra proyectada en ese instante por la antena?

53. Trigonometría

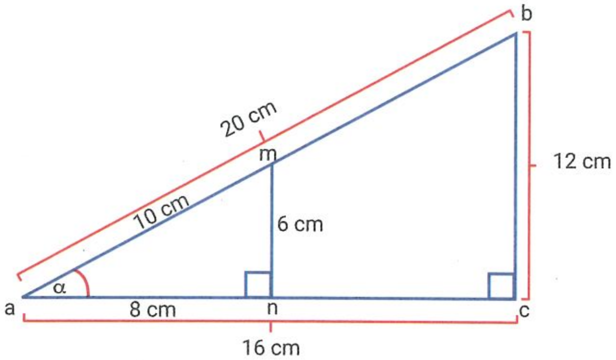
▶ SABERES DINÁMICOS

En un **triángulo rectángulo**, el lado que se opone al ángulo recto se llama **hipotenusa** y cada **cateto** recibe un nombre según el ángulo agudo que se considere.





Considerando dos triángulos rectángulos semejantes abc y amn, se pueden formar las siguientes razones con las longitudes de sus lados.



En $\overset{\triangle}{amn}$

$\dfrac{\overline{mn}}{\overline{am}} = 0{,}6$

$\dfrac{\overline{an}}{\overline{am}} = 0{,}8$

$\dfrac{\overline{mn}}{\overline{an}} = 0{,}75$

En $\overset{\triangle}{abc}$

$\dfrac{\overline{bc}}{\overline{ab}} = 0{,}6$

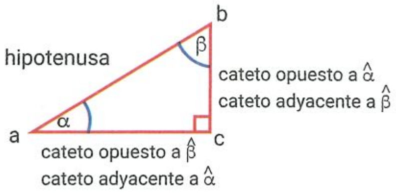
$\dfrac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = 0{,}8$

$\dfrac{\overline{bc}}{\overline{ac}} = 0{,}75$

Las razones que se formaron con las medidas de los lados dependen únicamente del ángulo α.

Razones trigonométricas

Se llaman **razones trigonométricas** a las que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.



Definición de las razones trigonométricas según el ángulo agudo considerado	
Seno = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\text{sen}\,\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$ $\text{sen}\,\hat{\beta} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$	**Cosecante** = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$ $\text{cosec}\,\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ $\text{cosec}\,\hat{\beta} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$
Coseno = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$ $\cos\hat{\beta} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$	**Secante** = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$ $\sec\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$ $\sec\hat{\beta} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$
Tangente = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ $\text{tg}\,\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$ $\text{tg}\,\hat{\beta} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$	**Cotangente** = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$ $\text{cotg}\,\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$ $\text{cotg}\,\hat{\beta} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$

ACTIVIDADES

53. Trigonometría

Test de comprensión

32. Respondan y expliquen sus respuestas.

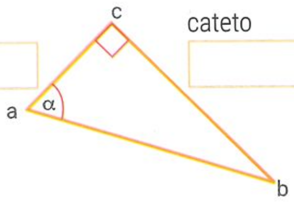
a. ¿De qué manera se identifica la hipotenusa de un triángulo rectángulo? ¿Y el cateto opuesto?

b. ¿Es posible afirmar que el valor del seno de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo coincide con el valor del coseno del otro ángulo agudo?

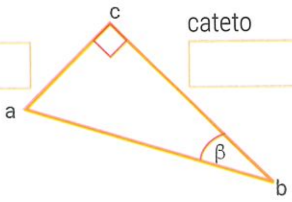
c. ¿En qué casos el seno y el coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo tienen el mismo valor?

33. Completen con los nombres correspondientes a los catetos en cada triángulo.

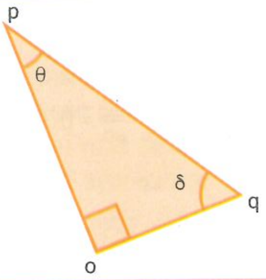
a. cateto ______ cateto ______



b. cateto ______ cateto ______

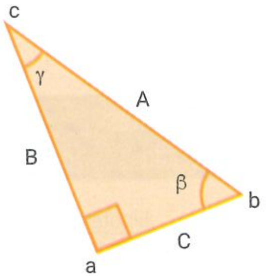


34. Completen la tabla con las razones trigonométricas correspondientes del triángulo opq.



sen $\hat{\theta}$ =	cosec $\hat{\theta}$ =	sen $\hat{\delta}$ =	cosec $\hat{\delta}$ =
cos $\hat{\theta}$ =	sec $\hat{\theta}$ =	cos $\hat{\delta}$ =	sec $\hat{\delta}$ =
tg $\hat{\theta}$ =	cotg $\hat{\theta}$ =	tg $\hat{\delta}$ =	cotg $\hat{\delta}$ =

35. Tengan en cuenta el triángulo abc y escriban V (verdadero) o F (falso) en cada afirmación.



a. El sen $\hat{\beta}$ se calcula mediante la razón $\frac{C}{A}$. ☐

b. El cos $\hat{\gamma}$ coincide con el cos $\hat{\beta}$. ☐

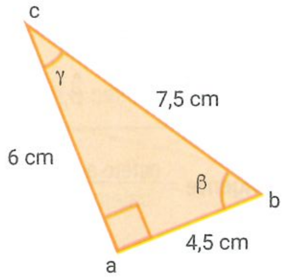
c. La sec $\hat{\gamma}$ se calcula mediante la razón $\frac{A}{B}$. ☐

d. La tg $\hat{\beta}$ = 1 solo cuando B = C. ☐

e. En todo triángulo rectángulo el cos $\hat{\gamma}$ coincide con el sen $\hat{\beta}$. ☐

f. La tg $\hat{\beta}$ se puede calcular mediante la razón $\frac{\cos \hat{\beta}}{\text{sen}\, \hat{\beta}}$. ☐

36. Completen cada una de las razones trigonométricas con el valor correspondiente en cada caso.



a. sen $\hat{\beta}$ = ______

b. cos $\hat{\beta}$ = ______

c. tg $\hat{\beta}$ = ______

d. cosec $\hat{\beta}$ = ______

e. sec $\hat{\beta}$ = ______

f. cotg $\hat{\beta}$ = ______

g. sen $\hat{\gamma}$ = ______

h. cos $\hat{\gamma}$ = ______

i. tg $\hat{\gamma}$ = ______

j. cosec $\hat{\gamma}$ = ______

k. sec $\hat{\gamma}$ = ______

l. cotg $\hat{\gamma}$ = ______

54. Cálculo de razones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Cálculo de razones trigonométricas usando la calculadora

• Para poder calcular las razones trigonométricas conociendo el valor de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo usando la calculadora, se la debe colocar en modo sexagesimal y, luego, seguir los siguientes pasos.

sen 45° ≅ 0,707 ⟶ [sin] [4] [5] [=]

cos 63° 12' ≅ 0,45 ⟶ [cos] [6] [3] [°'''] [1] [2] [°'''] [=]

tg 25° 10' 37' ≅ 0,47 ⟶ [tan] [2] [5] [°'''] [1] [0] [°'''] [3] [7] [°'''] [=]

cosec 60° ≅ 1,15 ⟶ [1] [/] [sen] [6] [0] [°'''] [=]

• Si se conoce el valor de la razón trigonométrica, es posible también conocer el valor del ángulo correspondiente siguiendo estos pasos.

cos x = 0,5 ⇒ x = 60° ⟶ [SHIFT] [cos] [0] [.] [5] [=] [°''']

sen x = 0,733 ⇒ x ≅ 47° 8' 19'' ⟶ [SHIFT] [sen] [0] [.] [7] [3] [3] [=] [°''']

tg x = 1 ⇒ x = 45° ⟶ [SHIFT] [tg] [1] [=] [°''']

$$\sec x = 1{,}632 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{1{,}632} \Rightarrow \cos x \cong 0{,}613 \Rightarrow x \cong 52^\circ\, 12'\, 42''$$

⟶ [SHIFT] [cos] [0] [.] [6] [1] [3] [=] [°''']

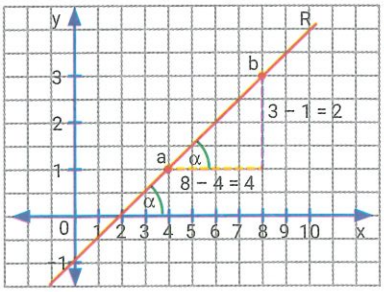
Valor de las razones trigonométricas de algunos ángulos notables

Razón \ $\hat{\alpha}$	0°	30°	45°	60°	90°
sen $\hat{\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos $\hat{\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg $\hat{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe.

Relación entre la tangente trigonométrica y la pendiente de una recta

La **inclinación** de una recta es el ángulo que forma el eje x con dicha recta, y su **pendiente** es la tangente trigonométrica.

La recta R de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 1$ *está representada por el siguiente gráfico.*



Se toman dos puntos para determinar $\hat{\alpha}$: *a = (4; 1) y b = (8; 3).*

Se calcula su inclinación resolviendo la siguiente ecuación:

$$\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{2}{4} \Rightarrow \text{tg}\,\hat{\alpha} = 0{,}5 \Rightarrow \hat{\alpha} = 26^\circ\, 33'\, 54''$$

La inclinación de R es 26° 33' 54''.

ACTIVIDADES

54. Cálculo de razones trigonométricas

Test de comprensión

37. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es posible calcular un ángulo cuyo seno sea igual a dos? ¿Por qué?

b. ¿Se puede calcular el valor de la secante de 60° usando el valor del seno de 30°?

c. Analicen la relación que existe entre el seno y el coseno, la tangente y la cotangente, la secante y la cosecante de dos ángulos complementarios y escriban una conclusión.

38. Completen la tabla usando la calculadora.

$\widehat{\alpha}$	sen $\widehat{\alpha}$	cos $\widehat{\alpha}$	tg $\widehat{\alpha}$	cosec $\widehat{\alpha}$	sec $\widehat{\alpha}$	cotg $\widehat{\alpha}$
26° 18' 43"						
	0,748					
		0,606				
			1,948			

39. Redondeen el resultado correcto en cada caso, resuelvan los ejercicios combinados en sus carpetas.

a. $2 \cdot \text{sen } 45° + \cos 60° - \sec 45° =$

• $\frac{1}{2}$ • 2 • $\frac{\sqrt{2}}{2}$ • $\sqrt{2}$

b. $\cos^2 30° - \text{tg}^2 60° + \sec^2 45° =$

• $\frac{1}{4}$ • 1 • $-\frac{1}{4}$ • $\frac{3}{4}$

c. $\frac{(\text{sen } 60° + \text{tg } 30°)^2}{\text{cotg}^2 60°} =$

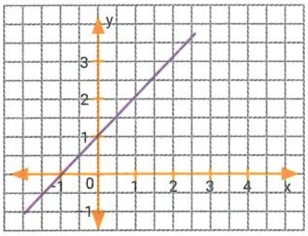
• $\frac{25}{6}$ • $\frac{25}{12}$ • $\frac{25}{36}$ • $\frac{25}{4}$

d. $\frac{\text{sen } 90° - \text{cosec } 30° + 2 \cdot \cos 0°}{\text{cotg } 45°} =$

• 1 • $\frac{1}{3}$ • 3 • 0

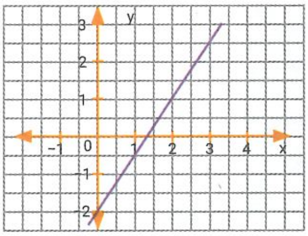
40. Indiquen la pendiente y el ángulo de inclinación de las siguientes rectas.

a.



m = ____ ; $\hat{\alpha}$ = ____

b.



m = ____ ; $\hat{\alpha}$ = ____

41. Tengan en cuenta el diagrama de esta escalera de 14 escalones y respondan en la carpeta.

a. ¿Cuál es la altura de cada uno de los escalones?

b. Una escalera se debe construir según la "fórmula para escaleras": **2 . Ae + 1 . Pe = 63 cm**. La escalera de la imagen, ¿cumple con la fórmula de las escaleras?

c. ¿Cuál debería ser la profundidad de cada escalón cuando la altura es de 14 cm? ¿Cuál sería la inclinación aproximada de la escalera?

55. Resolución de triángulos rectángulos

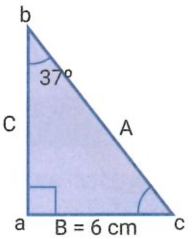
▶ SABERES DINÁMICOS

Resolver un triángulo rectángulo significa hallar las medidas de los tres lados y de los ángulos agudos a partir de ciertos datos, usando las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Para resolver un triángulo rectángulo, como el ángulo recto ya está determinado, se debe conocer al menos el valor de uno de sus ángulos agudos y un lado, o el valor de dos de sus lados.

- **Dados un ángulo agudo y uno de sus lados.**

Para recordar pág. 209



Para calcular el ángulo $\hat{c}$, se debe aplicar la propiedad de los ángulos complementarios (suman 90°).

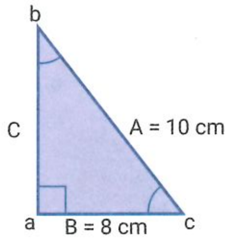
$\hat{c} + \hat{b} = 90° \Rightarrow \hat{c} = 90° - \hat{b} \Rightarrow \hat{c} = 90° - 37° \Rightarrow \mathbf{\hat{c} = 53°}$

Para calcular los lados A y C se aplican las razones trigonométricas.

$$\text{sen } 37° = \frac{6 \text{ cm}}{A} \Rightarrow A = \frac{6 \text{ cm}}{\text{sen } 37°} \Rightarrow \mathbf{A = 9{,}97\ cm}$$

$$\text{tg } 37° = \frac{6 \text{ cm}}{C} \Rightarrow C = \frac{6 \text{ cm}}{\text{tg } 37°} \Rightarrow \mathbf{C = 7{,}96\ cm}$$

- **Dados dos de sus lados.**



Para calcular la medida del lado C, se debe aplicar el teorema de Pitágoras.

$A^2 = B^2 + C^2 \Rightarrow (10 \text{ cm})^2 = (8 \text{ cm})^2 + C^2 \Rightarrow C^2 = (10 \text{ cm})^2 - (8 \text{ cm})^2 \Rightarrow$

$C^2 = 100 \text{ cm}^2 - 64 \text{ cm}^2 \Rightarrow C^2 = 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow C = \sqrt{36 \text{ cm}^2} \Rightarrow \mathbf{C = 6\ cm}$

Para calcular el valor de los ángulos se aplican razones trigonométricas.

$$\text{sen } \hat{b} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \text{sen } \hat{b} = 0{,}8 \Rightarrow \mathbf{\hat{b} = 53°\ 7'\ 48''}$$

$$\cos \hat{c} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \cos \hat{c} = 0{,}8 \Rightarrow \mathbf{\hat{c} = 36°\ 52'\ 12''}$$

Se verifica: $\hat{b} + \hat{c} = 53°\ 7'\ 48'' + 36°\ 52'\ 12'' = 90°$

Dinámica TConecta

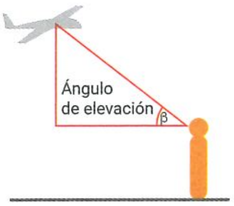
Ingresen en puerto.pub/trirec * para observar cómo, al modificar las medidas en un triángulo rectángulo, se mantienen sus propiedades.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/tgsnvjkj

Cuando se resuelven **situaciones problemáticas con triángulos rectángulos** es importante definir los términos de **ángulo de elevación** y **ángulo de depresión**, que se forman entre la paralela a la horizontal y la línea de visión.

Ángulo de elevación
Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de la visual a un objeto que se encuentra por encima del horizonte.

Ángulo de depresión
Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de la visual a un objeto que se encuentra por debajo del horizonte.



ACTIVIDADES

55. Resolución de triángulos rectángulos

Test de comprensión

42. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo el valor de sus ángulos agudos? ¿Por qué?

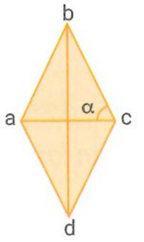
b. Si en un triángulo rectángulo solo se conocen las medidas de sus catetos, ¿cuál es la relación trigonométrica que debe utilizarse para conocer las medidas de sus ángulos agudos?

c. ¿En qué triángulo rectángulo basta con conocer el valor de uno de sus catetos para resolverlo completamente?

43. Resuelvan lo pedido en cada caso. Realicen los cálculos en la carpeta. Para recordar pág. 209

a. $\hat{\alpha} = 54^{\circ}\ 27'\ 44''$;

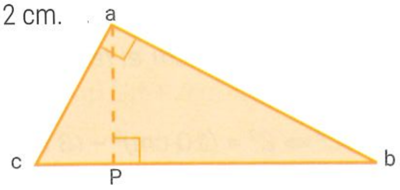
$\overline{bc} = 8{,}6$ cm.



Área del rombo abcd = ______

b. $\overline{ac} = 15$ cm;

$\overline{cp} = 12$ cm.

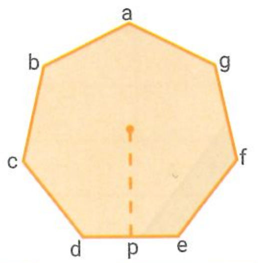


Perímetro triáng. abc = ______;

$\hat{b}$ = ______; $\hat{c}$ = ______

c. $\overline{ab} = 9{,}2$ cm;

Heptágono regular.



Apotema = ______; Área = ______

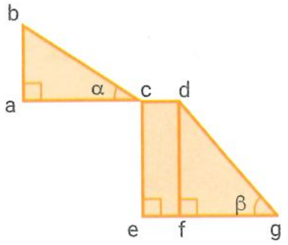
d. $\overline{ab} = 12{,}5$ cm;

$\overline{cd} = 10$ cm;

$\hat{\alpha} = 30^{\circ}$

$\overline{fg} = 19{,}3$ cm;

$\overline{dg} = 30$ cm.



$\hat{\beta}$ = ______

Área de la figura completa = ______

44. Planteen y resuelvan.

a. Desde un punto situado a 42 m del pie de una torre, se observa el punto más alto de la misma con un ángulo de elevación de 57° 20'. ¿Cuál es la altura de la torre?

______

b. Una cinta transportadora de carbón va desde una mina de carbón hasta una central de energía térmica. Si la cinta mide 350 m y se quiere elevar el combustible a 50 m de altura, ¿qué ángulo de elevación debe tener la cinta?

______

c. Desde la terraza de un edificio de 50 m de altura se observa un auto bajo un ángulo de depresión de 38°. ¿A qué distancia del pie del edificio se encuentra el auto?

______

d. Para conocer la altura de un árbol se mide un ángulo de elevación de 22° a la parte más alta desde un punto en el suelo. Se avanzan 12 m hacia el árbol y se repite la medición del ángulo de elevación hacia la parte más alta que ahora es de 45°. ¿Cuál es la altura del árbol?

______

56. Teoremas del seno y del coseno

▶ SABERES DINÁMICOS

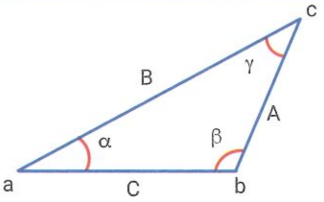
Los teoremas y propiedades que se trabajaron hasta ahora son válidos solamente en triángulos rectángulos. Los **teoremas del seno** y **del coseno** se pueden aplicar en todo triángulo.

Dinámica TConecta

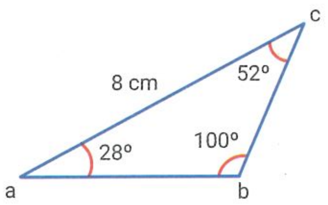
Ingresen en puerto.pub/tsen * y en puerto.pub/tcos ** para observar las comprobaciones de los teoremas del seno y del coseno.

Enlaces acortados de *https://www.geogebra.org/m/gShanJhC y **https://www.geogebra.org/m/kdfNxBJd

Dado el triángulo abc:



Teorema del seno	Teorema del coseno
Los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. $\frac{A}{\text{sen } \hat{\alpha}} = \frac{B}{\text{sen } \hat{\beta}} = \frac{C}{\text{sen } \hat{\gamma}}$	El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman. $A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos \hat{\alpha}$ $B^2 = A^2 + C^2 - 2 \,.\, A \,.\, C \,.\, \cos \hat{\beta}$ $C^2 = A^2 + B^2 - 2 \,.\, A \,.\, B \,.\, \cos \hat{\gamma}$
Si abc es rectángulo en a $\Rightarrow \hat{\alpha} = 90^o$	
$\frac{A}{\text{sen } 90^o} = \frac{B}{\text{sen } \hat{\beta}} \Rightarrow \text{sen } \hat{\beta} = \frac{B}{A}$ $\frac{A}{\text{sen } 90^o} = \frac{C}{\text{sen } \hat{\gamma}} \Rightarrow \text{sen } \hat{\gamma} = \frac{C}{A}$ **Relaciones trigonométricas**	$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos 90^o \Rightarrow$ $A^2 = B^2 + C^2$ **Teorema de Pitágoras**

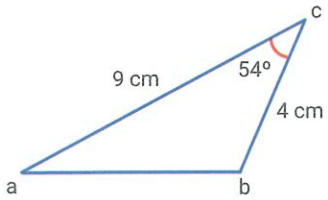


Para calcular las medidas de los lados $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ se aplica el teorema del seno.

Para recordar pág. 209

$$\frac{8 \text{ cm}}{\text{sen } 100^o} = \frac{\overline{ab}}{\text{sen } 52^o} \Rightarrow \overline{ab} = 6{,}40 \text{ cm}$$

$$\frac{8 \text{ cm}}{\text{sen } 100^o} = \frac{\overline{bc}}{\text{sen } 28^o} \Rightarrow \overline{bc} = 3{,}81 \text{ cm}$$



Para calcular la medida del lado $\overline{ab}$ se aplica el teorema del coseno.

$$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \,.\, \overline{bc} \,.\, \overline{ac} \,.\, \cos \hat{c}$$

$$\overline{ab}^2 = (4 \text{ cm})^2 + (9 \text{ cm})^2 - 2 \,.\, 4 \text{ cm} \,.\, 9 \text{ cm} \,.\, \cos 54^o$$

$$\overline{ab}^2 = 54{,}68 \text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{ab} = \sqrt{54{,}68 \text{ cm}^2} \Rightarrow \overline{ab} = 7{,}40 \text{ cm}$$

ACTIVIDADES

56. Teoremas del seno y del coseno

Test de comprensión

45. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. El teorema del seno, ¿se cumple en un triángulo rectángulo?

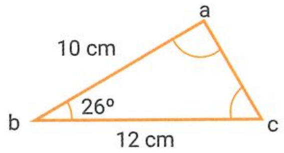
b. El teorema del coseno, ¿es un caso particular del teorema de Pitágoras?

c. Discutan con sus compañeros los datos mínimos con los que se debe contar para aplicar el teorema del seno y del coseno.

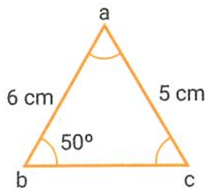
46. Calculen todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos, enuncien la propiedad o el teorema aplicado en cada caso.

a.

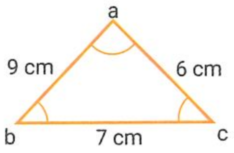
c.



b.



d.



47. Planteen y resuelvan.

a. Dos caminos rectos se cortan en un punto "p" formando un ángulo de 42°. En un punto "r" sobre uno de los caminos se encuentra un edificio a 368 m de "p" y en otro punto "s", sobre el otro camino se sitúa un hospital a 426 m de "p". ¿Cuál es la distancia entre el edificio y el hospital?

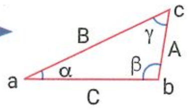
b. Dos puntos, "a" y "b", están ubicados sobre las orillas opuestas de un río. Otro punto "c", está en la misma orilla del río que el punto "b", a una distancia de 70 m de él. Si el ángulo en "b" es 105° y el ángulo en "c" es de 20°, ¿cuál es la distancia de "a" hasta "b" a través del río?

57. Resolución de triángulos oblicuángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

Cuando un triángulo no tiene ningún ángulo interior recto recibe el nombre de oblicuángulo. Resolver un triángulo oblicuángulo implica encontrar el valor de todos sus ángulos y las medidas de todos sus lados.

Resolución de triángulos oblicuángulos →



significa

Hallar las medidas de todos sus

Lados — **Ángulos**

se pueden usar

Teorema del seno

$$\frac{A}{\text{sen}\,\hat{\alpha}} = \frac{B}{\text{sen}\,\hat{\beta}} = \frac{C}{\text{sen}\,\hat{\gamma}}$$

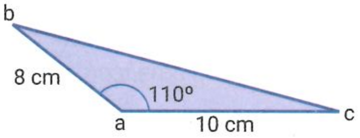
Teorema del coseno

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos\hat{\alpha}$$
$$B^2 = A^2 + C^2 - 2 \,.\, A \,.\, C \,.\, \cos\hat{\beta}$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \,.\, A \,.\, B \,.\, \cos\hat{\gamma}$$

Suma de los ángulos interiores

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 90º$$

Para calcular las medidas del lado $\overline{bc}$ se aplica el teorema del coseno.



$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \,.\, \overline{ab} \,.\, \overline{ac} \,.\, \cos\hat{a}$$
$$\overline{bc}^2 = (8\text{ cm})^2 + (10\text{ cm})^2 - 2 \,.\, 8\text{ cm} \,.\, 10\text{ cm} \,.\, \cos 110º$$
$$\overline{bc}^2 = 64\text{ cm}^2 + 100\text{ cm}^2 - 160\text{ cm}^2 \,.\, \cos 110º$$
$$\overline{bc}^2 = 218{,}72\text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{bc} = \sqrt{218{,}72\text{ cm}^2} \Rightarrow \overline{bc} = 14{,}8\text{ cm}$$

Para calcular la medida de los ángulos $\hat{b}$ y $\hat{c}$ se aplica el teorema del seno.

$$\frac{10\text{ cm}}{\text{sen}\,\hat{b}} = \frac{14{,}8\text{ cm}}{\text{sen }110º} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{b} = \frac{10\text{ cm} \,.\, \text{sen }110º}{14{,}8\text{ cm}} \Rightarrow \hat{b} = 39º\,26'\,55''$$

$$\frac{8\text{ cm}}{\text{sen}\,\hat{c}} = \frac{14{,}8\text{ cm}}{\text{sen }110º} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{c} = \frac{8\text{ cm} \,.\, \text{sen }110º}{14{,}8\text{ cm}} \Rightarrow \hat{c} = 30º\,33'\,5''$$

Se verifica la propiedad de la suma de ángulos interiores: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180º$.

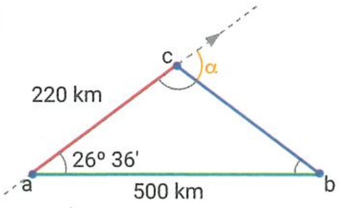
Para recordar pág. 209

$110º + 39º\,26'\,55'' + 30º\,33'\,5'' = 180º$ ⟵ se verifica.

Áreas dinámicas [Matemática y la navegación aérea]

Los **teoremas del seno** y **del coseno** son muy importantes para calcular distancias, ángulos y trayectorias en distintas situaciones. El siguiente es un ejemplo de cómo ayudan a un avión que se desvió de su trayectoria.

Un avión se desvió de su curso 26° 36' en el punto "a" y se quiere calcular qué ángulo debe utilizar para retomarlo 500 km más adelante (punto "b"). Se establece el punto "c" para realizar la maniobra.



- Se calcula $\overline{bc}$ usando el teorema del coseno:

$$\overline{bc}^2 = (500\text{ km})^2 + (220\text{ km})^2 - 2 \,.\, 500\text{ km} \,.\, 220\text{ km} \,.\, \cos 26°\,36' \Rightarrow \overline{bc} = 320\text{ km}$$

- Se calcula $\hat{c}$ usando el teorema del seno; y luego, $\hat{\alpha}$.

$$\frac{\text{sen }26°\,36'}{320\text{ km}} = \frac{\text{sen}\,\hat{c}}{500\text{ km}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{c} = 500\text{ km} \,.\, \frac{\text{sen }26°\,36'}{320\text{ km}} \Rightarrow \hat{c} = 135° \Rightarrow$$

$$\hat{\alpha} = 180° - 135° \Rightarrow \hat{\alpha} = 45°$$

ACTIVIDADES

57. Resolución de triángulos oblicuángulos

Test de comprensión

48. Respondan y expliquen sus respuestas.

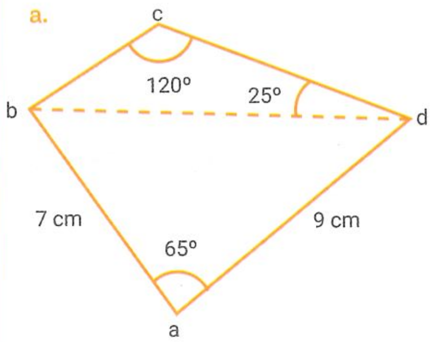
a. Si de un triángulo acutángulo se conocen solo dos de sus ángulos, ¿es posible conocer sus lados?

b. Se conocen todos los lados de un triángulo obtusángulo. ¿Cuál teorema se debe aplicar: el del seno o el del coseno?

c. Realicen un cuadro con las distintas situaciones que pueden presentarse para poder aplicar el teorema del seno y del coseno; por ejemplo: tener como dato dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

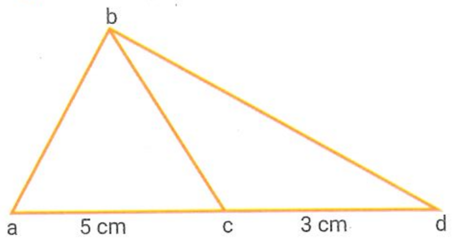
49. Calculen lo pedido en cada caso.

a.



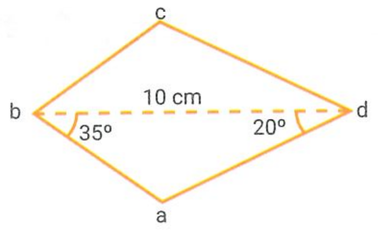
Perímetro de abcd =

b. $\overset{\triangle}{abc}$ es equilátero.



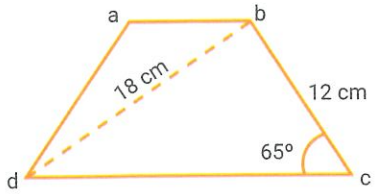
$\overline{bd}$ =

c. abcd es romboide.



Perímetro de abcd =

d. abcd es trapecio isósceles.



Perímetro de abcd =

57. Resolución de triángulos oblicuángulos

50. Planteen cada situación problemática y resuelvan.

a. Se quiere cercar un terreno de forma triangular pero solo se conocen las medidas de dos de sus lados (8 m y 10 m) y la del ángulo comprendido entre ellos (110° 30'). ¿Qué longitud de alambre tejido será necesario comprar?

b. Dos estaciones de vigilancia para prevenir incendios (A y B) se encuentran a 16 km de distancia. En una tarde de verano desde A se observa con un ángulo de 25° 18' una nube de humo que desde B se observa con un ángulo de 52° 36'. ¿Cuál de las dos estaciones se encuentra más cerca del incendio?

• En vacaciones, es muy común que en las montañas de la zona de Punilla en Córdoba se produzcan incendios de manera masiva, provocados por la falta de conciencia acerca de los peligros potenciales que podría provocar un fuego mal apagado o tirar un cigarrillo encendido en la zona. Para prevenir los incendios en el norte de Córdoba, se sitúan varias estaciones de vigilancia en la zona. Discutan con sus compañeros qué otras medidas podría tomar la ciudad para evitar estos incendios y escríbanlas.

c. Desde lo alto de una torre de 25 m de altura se observan las orillas de un río en forma perpendicular a él. El pie de la torre se encuentra a 50 m de la orilla más cercana y las líneas de visión desde la torre hasta cada una de las orillas forman un ángulo de 15°. Calculen el ancho del río.

51. Resuelvan y respondan.

Para mejorar las comunicaciones y la conectividad, en el pueblo de Juan instalaron una antena de 5G. La antena está sujeta al suelo desde su extremo más alto mediante dos cables de acero, uno a cada lado. Los cables forman ángulos de 54° 30' y de 25° 30' con el suelo, respectivamente, y sus puntos de apoyo están a una distancia de 126 m.

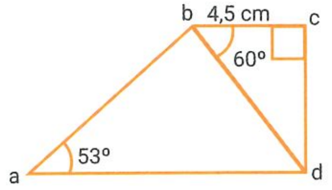
a. ¿Cuál es la altura de la antena?

b. ¿Qué longitud tiene cada uno de los cables?

57. Resolución de triángulos oblicuángulos

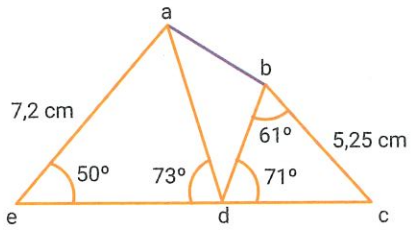
52. Calculen lo pedido en cada caso.

a.



Perímetro $\overset{\triangle}{abd}$ =

b.



$\overline{ab}$ =

53. Lean atentamente, planteen la situación y respondan.

Romina, Juan y Pedro quedaron en encontrarse para ir a la plaza. Romina y Juan viven en dos edificios enfrentados a 20 m de distancia con un parque en el medio. Pedro se encuentra entre los dos edificios a 6 m del de Romina. Les avisa por mensaje de WhatsApp y Romina y Juan salen al balcón. Romina observa a Juan con un ángulo de elevación de 6° 19' 12" y a Pedro con un ángulo de depresión de 60°. Pedro observa a Juan con un ángulo de elevación de 42°.

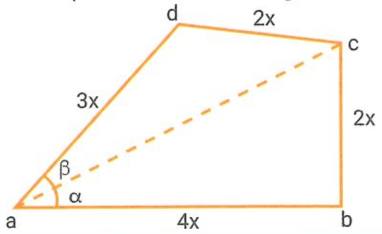
a. ¿A qué altura se ubica el departamento donde vive Romina? ¿Y el de Juan?

b. ¿Qué distancia separa a Pedro de Romina?

c. ¿Qué distancia separa a Juan de Romina?

DinámicaMente

Calculen la amplitud de $\hat{a}$ usando las longitudes de los lados indicadas en la figura.



54. **Resuelvan.**

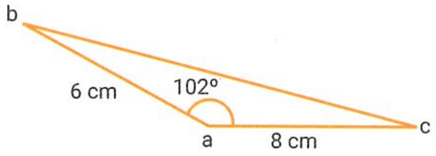
Una escalera tiene 20 escalones de 25 cm de profundidad y 18 cm de altura cada uno. Hallen la inclinación de la escalera y la altura respecto del piso a la que dicha escalera permite acceder.

55. **Completen la tabla.**

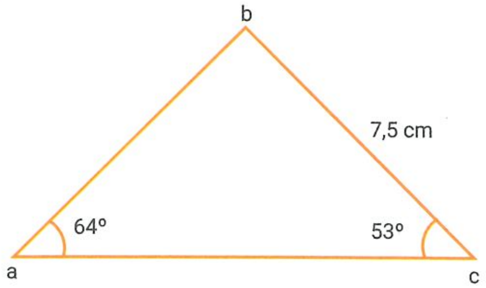
Ecuación de la recta	Inclinación de la recta
$y = \frac{1}{2}x + 3$	
$y = \frac{5}{2}x + 1$	
$y = 4x - 2$	
$y = \frac{1}{3}x$	

56. **Resuelvan los siguientes triángulos oblicuángulos.**

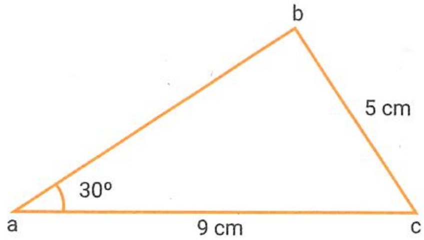
a.



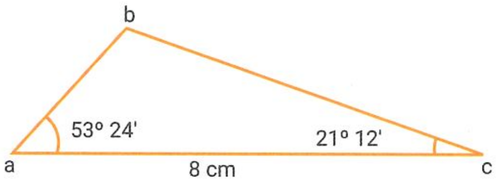
b.



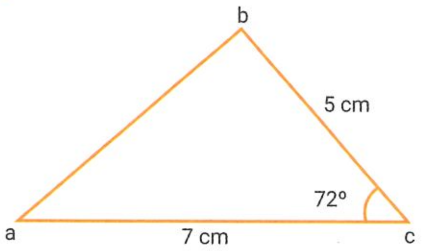
c.



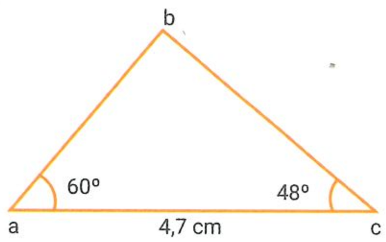
d.



e.



f.



57. Resuelvan.

Para recordar pág. 209

a. Calculen el perímetro de un rectángulo, sabiendo que su base mide 7,8 cm y el ángulo que forma la altura correspondiente a esa base con la diagonal es de 65°.

b. Calculen el perímetro de un rectángulo cuyas diagonales miden 8 cm y que uno de los ángulos que forman al cortarse es de 55°.

c. Calculen el área de un triángulo equilátero de perímetro $18\sqrt{3}$ cm.

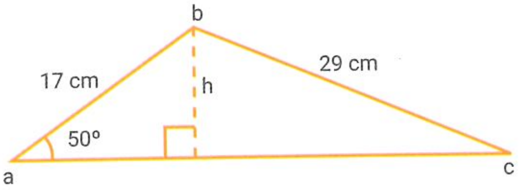
d. Encuentren las medidas de los lados de un paralelogramo sabiendo que sus diagonales miden 10 cm y 8 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse es de 60°.

e. Hallen el perímetro y las amplitudes de los ángulos de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 8 cm y 6 cm respectivamente.

f. Encuentren el área de un pentágono regular de 4 cm de lado.

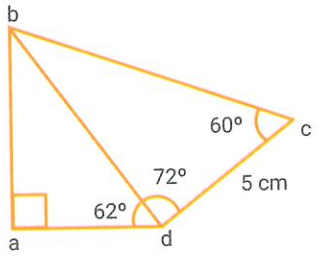
58. Calculen lo pedido en cada una de las siguientes figuras.

a.



$\overline{ac}$ = ; h =

b.



Perímetro =

59. Resuelvan.

a. En el sur de la provincia de Buenos Aires, debido a los fuertes vientos de la región, las antenas de comunicación comienzan a inclinarse generando rupturas en los cables. Para saber si una antena de 24 m de altura necesita ser reparada, Juan se ubica a 100 m de la base de la antena y mide el ángulo de elevación desde el piso hasta el punto más alto de la antena.

- ¿Qué ángulo deberá medir Juan para saber que la antena no necesita ser reparada?
- Si Juan mide un ángulo de 12° 47' 9", ¿cuál es el ángulo que se ha inclinado la antena respecto de la vertical que pasa por su base?

b. Julián quiere medir la altura de una torre, mide desde el piso un ángulo de elevación a la cima de la torre de 22°, avanza 12 m hacia la torre y vuelve a medir el ángulo de elevación hacia la cima y es 45°.

- ¿Cuál es la altura de la torre?

c. Dos barcos salen de un puerto a la misma hora, pero con rumbos distintos, en ese instante las direcciones de sus movimientos forman un ángulo de 110°. Luego de 2 horas de viaje, y sin haber cambiado la dirección, uno de los barcos está a 34 km en línea recta del puerto y el otro a 52 km también en línea recta.

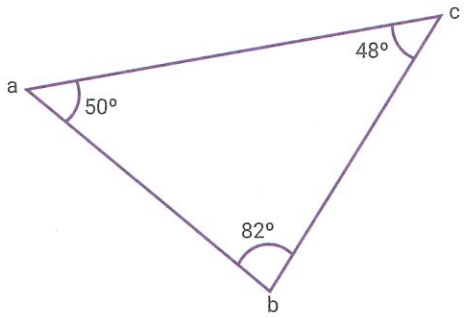
- ¿A qué distancia se encuentra uno de otro en ese momento?

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Suma de los ángulos interiores de un triángulo

En todo triángulo, **la suma de sus ángulos interiores es 180º**.

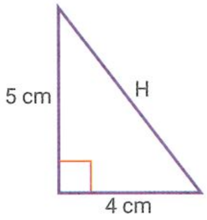


$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$

$50^\circ + 82^\circ + 48^\circ = 180^\circ$

Propiedad pitagórica

En todo triángulo rectángulo, **el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos**.



$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$

$$H^2 = (5 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2$$

$$H^2 = 5^2 \text{ cm}^2 + 4^2 \text{ cm}^2$$

$$H^2 = 25 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2$$

$$H^2 = 41 \text{ cm}^2$$

$$H = \sqrt{41 \text{ cm}^2}$$

$$H = \sqrt{41} \text{ cm}$$

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, **el producto de los medios (b y c) es igual al producto de los extremos (a y d)**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \,.\, d = b \,.\, c$$

$$\frac{12}{5} = \frac{60}{25} \Rightarrow 12 \,.\, 25 = 5 \,.\, 60 \Rightarrow 300 = 300$$

Algunas propiedades de las figuras planas

Triángulo equilátero: la altura de una de sus bases lo divide en dos triángulos rectángulos congruentes.

Rectángulo: sus diagonales son iguales y se cortan en su punto medio.

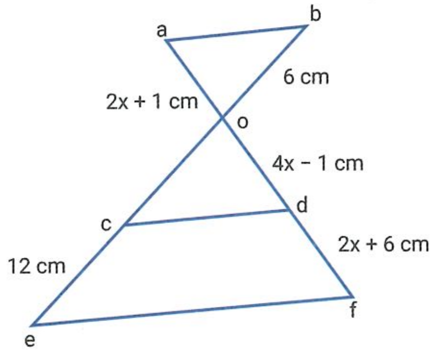
Paralelogramo: sus diagonales se cortan en su punto medio.

Rombo: sus diagonales se cortan en su punto medio, de manera perpendicular.

Área de un rombo: $\frac{\text{diagonal mayor . diagonal menor}}{2}$ **Área de un polígono regular:** $\frac{\text{perímetro . apotema}}{2}$

Marquen la opción correcta

60. Si $\overline{ab} // \overline{cd} // \overline{ef}$, ¿cuál es el valor de $\overline{oc}$?



◯ 6,5 cm

◯ 8,4 cm

◯ 1,5 cm

◯ Ninguna de las anteriores.

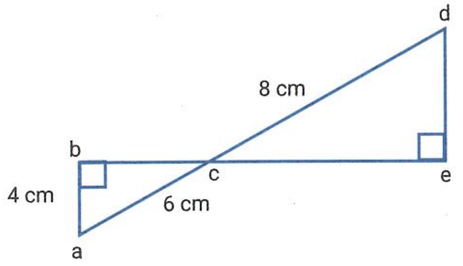
61. ¿Cuál es la medida del segmento cuarto proporcional de $\overline{ab}$ = 2 cm; $\overline{bc}$ = 3 cm y $\overline{ad}$ = 4 cm?

◯ 4,5 cm ◯ 6 cm ◯ 1,5 cm ◯ Ninguna de las anteriores.

62. ¿Cuál es la medida del segmento tercero proporcional de $\overline{ab}$ = 4 cm y $\overline{bc}$ = 5 cm?

◯ 6,25 cm ◯ 4 cm ◯ 10 cm ◯ Ninguna de las anteriores.

63. ¿Cuál es la longitud de $\overline{ce}$?



◯ 5 cm

◯ 5,6 cm

◯ 6 cm

◯ Ninguna de las anteriores.

64. ¿Cuál es la inclinación de la recta que pasa por los puntos (2; 1) y (5; 3)?

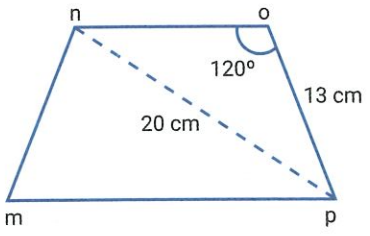
◯ 33° 41' 24" ◯ 56° 18' 36" ◯ 45° ◯ Ninguna de las anteriores.

65. ¿Cuál es el resultado correcto del siguiente cálculo?

$$\frac{\text{sen } 30° \cdot \cos 45°}{\sec 45°} \cdot \text{cosec } 30° + \frac{\cos 0° \cdot \text{sen } 30°}{\text{tg } 60°} \cdot \text{cotg } 30° =$$

◯ $\frac{1}{2}$ ◯ $\frac{3}{2}$ ◯ 1 ◯ Ninguna de las anteriores.

66. ¿Cuáles son las medidas de las bases del trapecio isósceles mnop?



◯ $\overline{no}$ = 10 cm; $\overline{mp}$ = 15 cm

◯ $\overline{no}$ = 10 cm; $\overline{mp}$ = 23 cm

◯ $\overline{no}$ = 8 cm; $\overline{mp}$ = 20 cm

◯ Ninguna de las anteriores.

9 Combinatoria y probabilidad

58. Combinatoria

▶ SABERES DINÁMICOS

Permutaciones, variaciones y combinaciones

Para recordar pág. 223

• Una **permutación sin repetición** es cada una de las formas posibles de ordenar **n** elementos distintos: $P_n = n!$

¿De cuántas maneras se pueden acomodar en hilera las siguientes figuras?

$P_3 = 3! = 6$. Se pueden acomodar de 6 maneras distintas.

Cantidad de veces que se repite cada elemento.

• **Permutación con elementos repetidos**: $P_n^{\alpha,\beta,\delta,\ldots\varpi} = \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\delta!\ldots\varpi!}$

¿De cuántas maneras se pueden acomodar las letras de la palabra "papas"?

$P_5^{2,2,1} = \dfrac{5!}{2!\,2!\,1!} = \dfrac{120}{4} = 30$ ⟶ Se pueden acomodar de 30 maneras distintas.

• Las **variaciones sin repetición** de elementos son las distintas formas que existen para agrupar **m** elementos distintos en grupos distintos de **n** elementos: $V_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Los grupos son distintos cuando tienen los mismos elementos, pero en distinto orden o por lo menos un elemento distinto. Por lo tanto, en la variación **importa el orden** que tengan los elementos en el grupo.

Dani compró 4 libros distintos para repartir entre sus amigos. Hoy se va a encontrar con tres de ellos. ¿De cuántas maneras distintas los puede repartir?

$V_3^4 = \dfrac{4!}{1!} = 24$ ⟶ Los puede repartir de 24 maneras distintas.

• **Variaciones con elementos repetidos**: $V'^{\,m}_{n} = m^n$

¿Cuántas claves de tres dígitos se pueden formar utilizando solo el 0 y el 1?

$V'^{\,2}_{3} = 2^3 = 8$ ⟶ Se pueden formar 8 claves distintas.

• Las **combinaciones sin repetición** son las distintas formas que existen para agrupar **m** elementos diferentes en grupos distintos de **n** elementos, de manera tal que los grupos difieran en por lo menos un elemento.

$$C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un pentágono?

$V_3^5 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{120}{12} = 10$ ⟶ Se pueden formar 10 triángulos distintos.

• **Combinaciones con repetición**: $C'^{\,m}_{n} = \dbinom{m+n-1}{n}$

En un quiosco hay 5 tipos diferentes de chicles. ¿De cuántas formas se pueden elegir tres de ellos?

$C'^{\,5}_{3} = C_3^7 = \dfrac{7!}{4!\,3!} = \dfrac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,3!} = \dfrac{210}{6} = 35$ ⟶ Se pueden elegir de 35 formas distintas.

Propiedades de los números combinatorios

• $\dbinom{n}{0} = 1$ • $\dbinom{n}{1} = n$ • $\dbinom{n}{n} = 1$ • $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ • $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$

ACTIVIDADES

58. Combinatoria

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que $6! = 6\ .\ 5!$?
   b. ¿Es cierto que $C_2^6 = \frac{V_2^6}{P_2}$?
   c. Si $\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{6}{4}$, ¿cuál es el valor de "n"?

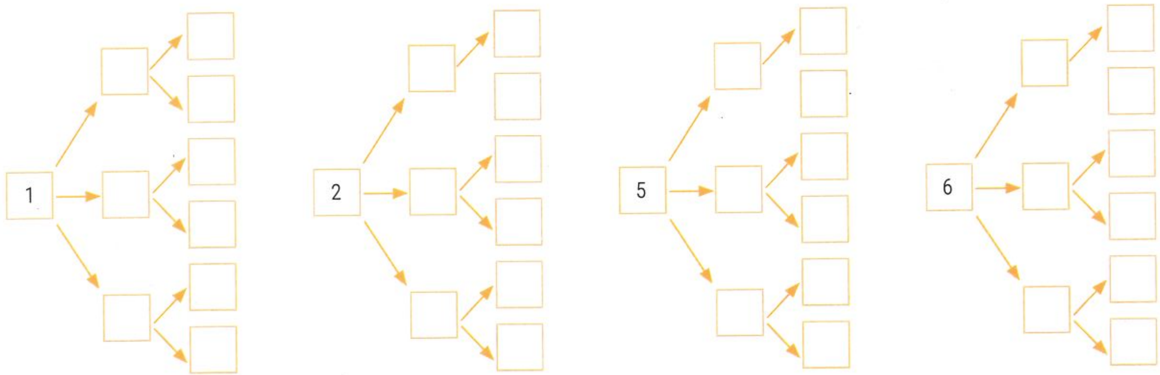
2. Marquen con una X la respuesta correcta en cada caso.

a. $x = 4! - 3!$ • $x = 1!$ ☐ • $x = 3\ .\ 3!$ ☐ • $x = 3\ .\ 4!$ ☐

b. $x = \frac{10!}{9!}$ • $x = 10$ ☐ • $x = \frac{10}{9}$ ☐ • $x = 90$ ☐

c. $x + \frac{5!}{3!} = \frac{6!}{5!} + 0!$ • $x = 13$ ☐ • $x = -13$ ☐ • $x = -14$ ☐

3. Completen el siguiente diagrama de árbol para calcular todos los números posibles de tres cifras distintas que se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 5 y 6.



4. Marquen con una X la operación que permite calcular la cantidad de números posibles de la actividad anterior.

a. P_4 ☐ b. C_3^4 ☐ c. V_3^4 ☐

5. Lean atentamente y resuelvan, utilizando los dígitos 2, 3 y 5.

a. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar? ____________

b. ¿Cuántos números pares de tres cifras distintas se pueden formar? ____________

c. ¿Cuántos números de tres cifras (vale repetirlas) se pueden formar? ____________

d. ¿Cuántos números de tres cifras distintas menores o iguales a 500 se pueden formar? ____________

6. Lean atentamente y resuelvan.

a. ¿De cuántas maneras distintas se pueden disponer en una fila 5 personas? ____________

• ¿Y si la primera siempre es la misma? ____________ • ¿Y si dos de ellas siempre están juntas? ____________

b. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra "LÁPIZ"? ____________

• ¿Cuántas empiezan con "P"? ____________ • ¿Cuántas terminan en vocal? ____________

c. En una competencia participan 9 atletas: el primer premio es medalla de oro; el segundo, de plata y el tercero, de bronce. ¿De cuántas maneras distintas se pueden otorgar dichas medallas?

____

7. Resuelvan trabajando con un compañero.

a. ¿De cuántas maneras distintas se pueden apilar 3 cubos rojos y 2 amarillos si todos son del mismo tamaño? ______

- ¿Y si no se alternan los colores? ______

b. ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar las letras de la palabra "ROJO"?

______

- ¿Cuántas empiezan con "R"? ______

c. ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar en hilera las siguientes imágenes?

- ¿Y si el perro siempre va primero? ______
- ¿Y si los gatos siempre van primero? ______
- ¿Y si los gatos siempre están juntos? Realicen en sus carpetas el diagrama de árbol.

______

d. Un tablero tiene 5 lamparitas que pueden estar prendidas o apagadas.

- ¿De cuántas maneras distintas pueden estar las lamparitas en el tablero? ______
- ¿Y si la primera siempre está apagada? ______
- ¿Y si la primera está siempre apagada y la tercera encendida? ______

8. Calculen el valor de "m".

a. $P_m = 7 \cdot 6 \cdot 5!$ ______

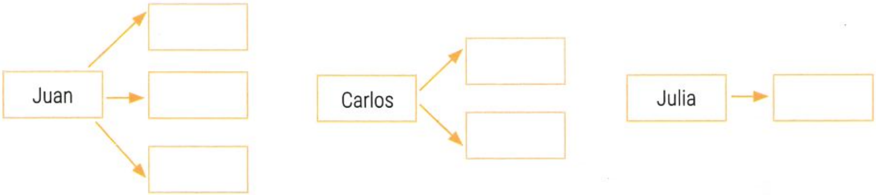
b. $V'^{m}_{3} = 216$ ______

c. $C^m_3 = \frac{V^5_3}{P_3}$ ______

d. $V^m_2 = 132$ ______

9. Lean atentamente y completen el diagrama de árbol.

Juan, Carlos, Julia y Luis participan de un torneo. Cada participante debe saludar a los restantes dándoles la mano. ¿Cuántos saludos se realizarán? Marquen con una X la opción correcta.



a. V^4_2 ☐ b. C^4_2 ☐ c. P_4 ☐

10. Resuelvan los siguientes problemas.

a. ¿Cuántas comisiones de 3 personas elegidas entre 6 se pueden formar? ______

- ¿Cuántas, si el primero es el presidente, el segundo el vice y el tercero el secretario? ______

b. ¿Cuántos grupos de 5 personas compuestos por 2 mujeres y 3 varones se pueden formar, elegidos entre 7 mujeres y 6 varones? ______

- ¿Cuántos, si todos son varones? ______
- ¿Cuántos, si todas son mujeres? ______

c. ¿Cuántos segmentos se pueden trazar con los vértices de un decágono? ______

- ¿Y si los segmentos son orientados? ______
- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar? ______

d. Para aprobar un examen se deben contestar correctamente 3 de 5 preguntas.

¿De cuántas maneras distintas se puede contestar para aprobar? ______

e. Juan compra $\frac{1}{2}$ kilo de helado, quiere elegir dos gustos de los 10 que tiene la heladería.

- ¿De cuántas maneras distintas puede elegirlos? ______
- ¿Y si prefiere pedir un cucurucho y le importa el orden en que sirven los 2 gustos? ______

11. Lean atentamente y resuelvan.

Juan quiere comprar 2 botellas de gaseosas. Tiene para elegir entre 3 tipos distintos: A, B y C.

a. ¿De cuántas maneras distintas puede comprar las gaseosas? ______

b. Realicen en sus carpetas un diagrama de árbol con las posibilidades.

c. Marquen con una X la operación que permite calcular la respuesta correcta.

- C'^{3}_{2} ☐
- V'^{3}_{2} ☐
- C^{3}_{2} ☐

12. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $C^{x}_{2} = P_3$ ______

b. $\binom{7}{2x+3} = \binom{7}{x+1}$ ______

c. $V^{x}_{2} = 210$ ______

d. $\binom{7}{x+1} + \binom{7}{x+1} = \binom{7}{6}$ ______

DinámicaMente

¿De cuántas maneras se pueden ubicar en hilera 3 varones y 2 mujeres si deben estar alternados?

______

59. Binomio de Newton. Triángulo de Pascal

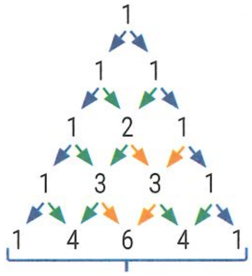
▶ SABERES DINÁMICOS

El **binomio de Newton** es una fórmula que se utiliza para obtener el desarrollo de un binomio elevado a un exponente natural cualquiera.

$$(a + b)^n \,,\; n \in \mathbb{N}$$

Las expresiones "a" y "b" pueden ser números, letras o expresiones algebraicas. Para recordar pág. 223

Si a = x y b = 3, el binomio queda expresado como $(x + 3)^n$.

Desarrollo de algunas potencias de a + b	Coeficientes de los polinomios resultantes
$(a + b)^0 = 1$ $(a + b)^1 = 1a + 1b$ $(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ $(a + b)^3 = (a + b)^2 \,.\, (a + b) = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ $(a + b)^4 = (a + b)^3 \,.\, (a + b) = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	Triángulo de Pascal

Si a = x y b = 1, el desarrollo de $(x + 1)^3$ es: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 \,.\, 1 + 3x \,.\, 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Para hallar $(a + b)^4$ a partir de la secuencia del triángulo de Pascal, se debe tener en cuenta que:

- la fila del triángulo es: 1, 4, 6, 4, 1.
- los factores siguen la siguiente secuencia: $a^4 b^0$, $a^3 b^1$, $a^2 b^2$, $a^1 b^3$, $a^0 b^4$.

Es decir que $(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3 b + 6\,a^2 b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/tpas* para conocer más acerca de las características del triángulo de Pascal.

*Enlace acortado de https://youtu.be/RDYwPDIk4zw

Se llama **fórmula de Newton** al desarrollo de un binomio cuyo exponente es un número natural cualquiera, teniendo en cuenta lo visto anteriormente y la noción de número combinatorio.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2\, b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

En la fórmula anterior el número de abajo del número combinatorio de cada término y el número al que está elevado "b" es una unidad inferior a la posición que ocupa ese término.

El término que ocupa el lugar k (T_k) del desarrollo de $(a + b)^n$ puede obtenerse mediante la fórmula:

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}\, b^{k-1}$$

Dado el binomio $(a + 2)^{10}$, ¿cuál es el término que ocupa la posición 6 en el desarrollo?

Se plantea la expresión $T_6 = \binom{10}{6-1} a^{10-(6-1)}\, 2^{6-1} = \binom{10}{5} a^5\, 2^5$

Áreas dinámicas [Matemática y la vida cotidiana]

El **triángulo de Pascal** puede ayudar a resolver muchas situaciones de la vida cotidiana.

Por ejemplo, si de un total de 5 personas se deben elegir 2 para realizar una tarea, se observa la fila 5 y se cuenta 0 [1], 1 [4], 2 [6]; se pueden elegir de 6 maneras diferentes. De la misma forma, si se deben elegir entre 4 colores, 2 de ellos, se observa la fila 4 y se cuenta 0 [1], 1 [3], 2 [3]; se pueden elegir los colores de 3 maneras distintas.

ACTIVIDADES

59. Binomio de Newton. Triángulo de Pascal

Test de comprensión

13. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que −81 es el último término del desarrollo de $(a - 3)^4$?

b. ¿Es cierto que $\binom{10}{4} a^6 b^4$ es el quinto término del desarrollo de $(a + b)^{10}$?

c. ¿A cuál término del desarrollo de $(x + 1)^8$ corresponde $T_k = \binom{8}{3} x^5$?

14. Observen la siguiente tabla correspondiente al desarrollo del triángulo de Pascal y resuelvan.

Fila	Coeficientes	Suma de los coeficientes
1	1	1
2	1 - 1	2
3	1 - 2 - 1	4
4	1 - 3 - 3 - 1	8
5	1 - 4 - 6 - 4 - 1	16
6		
7		

a. Completen la tabla.

b. Enuncien una fórmula que permita calcular la suma de los coeficientes correspondientes a la fila "n". __________

c. ¿Cuál es el valor de la suma de los coeficientes de la fila 9? __________

d. ¿Existe alguna fila cuyos coeficientes sumen 2 048? ¿Cuál? __________

15. Desarrollen mediante el binomio de Newton (ordenados en orden decreciente).

a. $(x + 1)^4 =$ __________

b. $(x - 2)^5 =$ __________

c. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^6 =$ __________

d. $(2x^3 - 3)^2 =$ __________

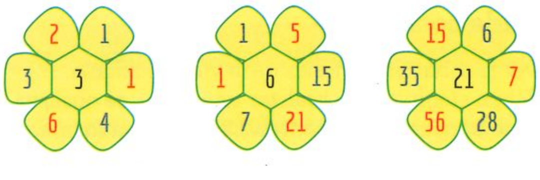
16. Calculen.

a. El término de segundo grado de $(x - 3)^5$.

b. El valor de "x" en $(x + 2)^2$, para que $T_1 + T_3 = 13$.

DinámicaMente

Construyan una flor de seis pétalos alrededor de uno cualquiera de los números interiores del triángulo de Pascal, por ejemplo:



Investiguen si existe una regularidad entre los números rojos y los azules.

60. Probabilidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **experimento** o **suceso** (S) es aleatorio cuando es producto del azar; por ejemplo: arrojar un dado, sacar una carta de un mazo o una bolilla de un bolillero, etc. El **espacio muestral** (E) es el conjunto de todos los resultados posibles de un suceso aleatorio; por ejemplo: al arrojar un dado, el espacio muestral E es: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

• La probabilidad de que un suceso ocurra es: $P(S) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número total de casos posibles}} = \frac{\#S}{\#E} \wedge 0 \leq P(S) \leq 1$

Se arroja un dado. Calculen las siguientes probabilidades.

$P(\text{múltiplo de } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad P(\text{divisor de } 6) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad P(\text{número} < 7) = \frac{6}{6} = 1$

• Se consideran ahora dos sucesos A y B en un espacio muestral E.

En un bolillero hay cinco bolillas verdes numeradas del 1 al 5 y cinco bolillas negras numeradas del 1 al 5.

$E = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\} \wedge \#E = 10$

Suceso A: sacar un bolilla verde → $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \wedge \#A = 5$

Suceso B: sacar un bolilla con valor igual a 3 → $B = \{v_3, n_3\} \wedge \#B = 2$

***a.** ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla verde con un valor igual a 3?*

$P(A \text{ y } B) = \frac{1}{10}$

***b.** ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla verde o una con un valor igual a 3?*

$P(A \text{ o } B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

TIP

∩ significa intersección.

∪ significa unión.

• La probabilidad de que A y B ocurran simultáneamente se llama **probabilidad compuesta**: $P(A \text{ y } B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#E}$

• La probabilidad de que A o B ocurra se llama **probabilidad total**: $P(A \text{ o } B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E}$

• En algunos casos, los sucesos sobre un mismo espacio muestral pueden relacionarse entre sí.

En una caja hay 2 cubos rojos y 2 azules.

***a.** ¿Qué es más probable: sacar un cubo rojo o uno azul?*

En una primera extracción: $P(\text{rojo}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \wedge P(\text{azul}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$*, es igualmente probable sacar un cubo rojo o uno azul.*

Estos **sucesos** son **equiprobables**.

***b.** Si se saca un cubo rojo y no se reintegra, ¿cuál es la probabilidad de sacar un cubo azul en una segunda extracción? ¿Y de sacar un cubo rojo?*

Si en la primera extracción salió rojo, en una segunda extracción: $P(\text{azul}) = \frac{2}{3} \wedge P(\text{rojo}) = \frac{1}{3}$.

Estos **sucesos** son **dependientes**.

***c.** Si se saca un cubo y se reintegra a la caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar un cubo azul en una segunda extracción? ¿Y de sacar un cubo rojo?*

Si se saca un cubo y se reintegra a la caja, la probabilidad de sacar rojo o azul en la segunda extracción es igual que en la primera: $P(\text{rojo}) = \frac{1}{2} \wedge P(\text{azul}) = \frac{1}{2}$.

Estos **sucesos** son **independientes**.

60. Probabilidad

Test de comprensión

17. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que la probabilidad de obtener un número par al tirar un dado es "1 – P(impar)"?

b. La probabilidad de que ocurra un suceso, ¿es siempre menor al #E?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado salga un número impar o el 5?

18. Respondan.

a. Calculen la probabilidad de cada suceso al arrojar un dado.

- P(2 o 3) = ______
- P(divisor de 4) = ______

b. Calculen la probabilidad de cada suceso al arrojar dos dados: uno blanco y otro rojo.

- P(dos números iguales) = ______
- P(par en el dado blanco y 5 en el rojo) = ______
- P(dos números que sumen 10) = ______
- P(3 en el dado blanco y 3 en el rojo) = ______
- P(par en el dado blanco) = ______
- P(dos números cuyo producto sea 4) = ______

19. Lean atentamente y resuelvan.

En un caja hay 3 lápices y 2 biromes y se extrae un elemento al azar. Calculen la probabilidad de cada suceso.

a. P(lápiz) = ______ b. P(birome) = ______ c. P(lápiz o birome) = ______

20. Reúnanse con un compañero, lean atentamente y resuelvan.

En un bolillero hay 7 bolillas: 5 son blancas y el resto, rojas. Se extraen dos bolillas sin reposición.

a. Completen el siguiente diagrama de árbol y respondan.

$P(B) = \frac{5}{7}$ → P(B) = — → P(B; B) = — . —
$P(B) = \frac{5}{7}$ → P(R) = — → P(B; R) = — . —

P(R) = — → P(B) = — → P(R; B) = — . —
P(R) = — → P(R) = — → P(R; R) = — . —

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolillas del mismo color?

______

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bolilla roja y una blanca, en ese orden?

______

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bolilla blanca y una roja, en cualquier orden?

______

e. ¿Qué probabilidad se obtiene con el cálculo: 1 – [P(B; R) + P(R; B)]?

______

f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolillas rojas si al sacar la primera se reintegra en la caja?

______

61. Probabilidad condicional

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **suceso** A está **condicionado** a otro B cuando la probabilidad de que suceda A se ve modificada a raíz del suceso B. La probabilidad de que ocurra el suceso A, si se sabe que ha ocurrido el suceso B, se denomina **probabilidad condicionada**.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Un bolillero cuenta con bolillas numeradas rojas y negras. El 40% de las bolillas son rojas y el 25% son pares y negras. Hay la misma cantidad de bolillas pares e impares.

a. Completen la tabla.

Como hay la misma cantidad de bolillas pares que impares, hay 50% de cada una.

Si el 40% de las bolillas son rojas, el 60% serán negras.

Si el 25% de las bolillas son pares y negras, el 25% serán pares rojas y el 35% serán impares y negras. Luego, el 15% serán impares y rojas (100% – 25% – 25% – 35% = 15%).

	Roja	Negra	Total
Par	25%	25%	50%
Impar	15%	35%	50%
Total	40%	60%	100%

b. Si al escoger una bolilla al azar, se sabe que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un número impar?

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A = \{impar\} \longrightarrow P(impar) = 0{,}50 \qquad B = \{roja\} \longrightarrow P(roja) = 0{,}40$

$A \cap B = \{impar\ y\ roja\} \longrightarrow P(impar\ y\ roja) = 0{,}15$

$$P(impar/roja) = \frac{P(impar\ y\ roja)}{P(roja)} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375$$

c. Si al escoger una bolilla al azar se sabe que se tiene un número par, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bolilla negra?

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A = \{negra\} \longrightarrow P(negra) = 0{,}60 \qquad B = \{par\} \longrightarrow P(par) = 0{,}50$

$A \cap B = \{negra\ y\ par\} \longrightarrow P(negra\ y\ par) = 0{,}25$

$$P(negra/par) = \frac{P(negra\ y\ par)}{P(par)} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/procon * para mirar un video donde se explica un ejemplo de resolución de un problema con probabilidad condicional.

*Enlace acortado de https://youtu.be/hyKToFCJ2OQ

ACTIVIDADES

61. Probabilidad condicional

Test de comprensión

21. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. La probabilidad de tener una hija mujer, si ya se tiene otra hija mujer, ¿es condicional?

b. Un bolillero contiene 3 bolillas blancas y 2 negras. La probabilidad de extraer, sin reposición, una negra y luego una blanca ¿es $P(N; B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$?

c. Si P(A/B) = P(B/A), entonces ¿A y B son sucesos independientes)?

22. Completen la tabla y respondan.

Población de 10 años y más por condición de alfabetismo y sexo, en CABA. Año 2010			
	A: alfabetizado	B: no alfabetizado	Total
V: varones	1 160 483		1 165 827
M: mujeres	1 395 255		
Total		12 403	

Fuente: INDEC (se incluye a las personas viviendo en situación de calle).

Se escoge una persona al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un varón? ____________

b. ¿Cuál es la probabilidad que sea una mujer alfabetizada? ____________

c. Si se sabe que es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que esté alfabetizada?

____

d. Si se sabe que no está alfabetizado, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?

____

23. Lean atentamente y respondan.

En la siguiente tabla se indica la cantidad de fallecidos por COVID-19 registrados en CABA y provincia de Buenos Aires el día 16/6/2021.

a. Completen la tabla.

Jurisdicción	F: femenino	M: masculino	Sin datos	Total
B: Buenos Aires	104	142		248
C: CABA	14			
Total			2	294

Fuente: https://www.argentina.gob.ar/salud/coronavirus-COVID-19/sala-situacion

b. Calculen la probabilidad de elegir al azar el dato indicado en cada caso. Aproximen por truncamiento a las cifras de las centenas.

Para recordar pág. 223

- P(F) = ____________
- P(M/B) = ____________
- P(F ∩ C) = ____________
- P(B/F) = ____________

Integración final

24. Calculen el valor de "n" en cada caso.

a. $n = \frac{5! + 4!}{3!}$

b. $n - 3! = \frac{n!}{2 . (n - 1)!}$

25. Resuelvan los siguientes problemas.

a. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar 4 libros distintos en un estante?

b. Para representar en una competencia a la escuela, se eligen 5 estudiantes entre 10 preseleccionados. ¿De cuántas formas distintas pueden ser elegidos?

c. ¿Cuántos cuadriláteros pueden determinarse con los vértices de un hexágono?

d. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra "PATOS" si la P y la A siempre están juntas?

e. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra "ALMA"?

f. Con los dígitos 0, 1, 2, 3 ¿cuántos números de 3 cifras distintas, múltiplos de 5, se pueden formar?

g. ¿De cuántas formas distintas pueden apilarse 5 cubos de distintos colores si el verde y el amarillo no pueden estar juntos?

26. Lean atentamente y resuelvan.

Ale, David, Néstor y Osvaldo entrenan tenis de mesa en un club. Cada jugador quiere jugar una vez contra cada uno de los otros jugadores y reservaron dos mesas para estos partidos.

a. Completen la tabla con los nombres de los jugadores que se enfrentarán en cada ronda.

Ronda	Mesa 1	Mesa 2
1	Ale-Osvaldo	David-Néstor
2		
3		

b. Marquen con una X el cálculo que permite averiguar la cantidad de partidos que se deben realizar.

- V_2^4 ☐
- C_2^4 ☐
- P_4 ☐

27. Marquen con una X las opciones correctas.

a. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar en una fila 3 varones y 2 mujeres si las mujeres permanecen juntas?

- 120 ☐
- 48 ☐
- 720 ☐

b. ¿De cuántas maneras distintas se puede armar un grupo de 3 integrantes si hay 10 personas para elegir?

- 120 ☐
- 600 ☐
- 720 ☐

28. Con los dígitos del 1 al 4, ¿cuántos números pares de tres cifras distintas se pueden formar? Realicen un diagrama de árbol para verificar la respuesta.

29. Lean atentamente y resuelvan.

a. En un torneo de ajedrez participan 10 jugadores.

- Si cada participante debe saludar a los restantes dándoles la mano, ¿cuántos saludos se deben hacer?
- Si solo reciben premio los dos primeros, ¿de cuántas maneras distintas pueden otorgarse el primer y el segundo premio?

b. Andrés quiere comprar 3 remeras y 2 pantalones; puede elegir entre 5 remeras distintas y 4 pantalones distintos. ¿Cuántas elecciones distintas puede realizar?

30. Resuelvan.

a. $(x - 3)^3 =$

b. $(x + 2)^4 =$

c. $(x^2 + x)^5 =$

31. Marquen con una X lo pedido en cada caso.

a. El tercer término del desarrollo de $(x - 4)^5$.

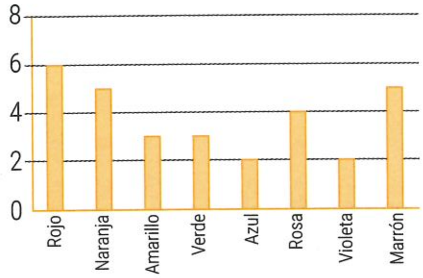
- $160x^3$ ☐
- $10x^7$ ☐
- $-160x^3$ ☐

b. El término de orden 3 en el desarrollo de $(3 + x)^4$.

- $54x^3$ ☐
- $12x^3$ ☐
- $3x^3$ ☐

32. **Lean atentamente y resuelvan.**

a. Una bolsa contiene caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.



- ¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar un caramelo que sea verde?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos caramelos sucesivamente sean los dos rojos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer sucesivamente tres caramelos sean el primero verde, el segundo violeta y el tercero marrón?

b. Calculen las siguientes probabilidades al lanzar un dado.

- Obtener un número múltiplo de 4.
- Obtener un número múltiplo de 3.
- Obtener un número par o múltiplo de 3.

c. Calculen las siguientes probabilidades al lanzar dos dados.

- Que la suma de las caras sea 7.
- Que la suma de las caras sea 11.
- Que la suma de las caras sea 7 u 11.
- Que la suma de las caras sea múltiplo de 5.

d. Un club de barrio tiene 120 socios: 44 juegan al fútbol, 30 al tenis y 28 a ambos juegos. Calculen las siguiente probabilidades al seleccionar un socio al azar.

- Que no juegue al fútbol.
- Que no juegue al tenis.
- Que no juegue al fútbol ni al tenis.

e. Una bolsa contiene cierto número de bolitas blancas y cuatro veces más de bolitas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bolita sea negra?

33. **Resuelvan.**

Se eligen sucesivamente y al azar dos personas de un grupo formado por 4 mujeres y 3 varones. Calculen las siguientes probabilidades.

a. Que ambas sean mujeres.

b. Que ambos sean varones.

c. Que sean de distinto sexo.

d. Que el segundo sea varón, si la primera es mujer.

34. **Calculen lo pedido sabiendo que P(A) = 0,6; P(B) = 0,5 y P(A/B) = 0,7.**

a. $P(A \cap B) =$ b. $P(B/A) =$

35. **En un bolillero hay 10 bolillas numeradas del 1 al 10. Se extraen sucesivamente dos sin reposición. Calculen las siguientes probabilidades.**

a. Que las dos bolillas tengan números pares.

b. Que al menos una bolilla tenga un número par.

36. **Completen la tabla y resuelvan.**

Fichas	Caja A	Caja B	Total
Rojas	45		125
Amarillas		205	365
Verdes	75	115	
Total			

a. ¿Qué porcentaje de las fichas es verde?

b. ¿Qué porcentaje de las fichas de la caja A no son rojas?

c. Se juntan todas las fichas en una caja C y se extrae una ficha al azar. Calculen las probabilidades:

- que sea roja.
- que sea roja y de la caja A.
- que sea verde si se sabe que es de la caja B.
- que sea de la caja A si se sabe que es amarilla.
- que sea roja o amarilla si es de la caja B.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Factorial de un número natural

El **factorial de un número** $n \in \mathbb{N}$, se define como el producto de todos los números naturales menores o iguales que "n".

$$n! = n \, . \, (n - 1) \, . \, (n - 2) \, . \, ... \, . \, 1$$

$6! = 6 \, . \, 5 \, . \, 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, . \, 1$ $\quad 4! = 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, . \, 1$

$6! = 6 \, . \, 5!$ $\quad 5! = 5 \, . \, 4!$ $\quad 1! = 1$ $\quad 0! = 1$

Propiedades:

$(n - 1)! = \frac{n!}{n}$

$m > n \Rightarrow \frac{m!}{n!} = m \, . \, (m - 1) \, . \, (m - 2) \, . \, ... \, . \, (n + 1)$

$5! = \frac{6!}{6} = \frac{6 \, . \, 5!}{6}$

$6 > 3 \Rightarrow \frac{6!}{3!} = \frac{6 . 5 . 4 . 3!}{3!} = 6 \, . \, 5 \, . \, 4$

Casos particulares del binomio de Newton

Cuadrado del binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cubo del binomio: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

Aproximación

Para **aproximar por redondeo** a una cifra decimal determinada, hay que observar la cifra decimal siguiente:

• Si es mayor o igual que 5, se le suma 1 a la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.

El redondeo de 25,8765 a los centésimos es 25,88.

• Si es menor que 5, la cifra considerada se deja igual y se elimina el resto de las cifras.

El redondeo de 32,235 a los décimos es 32,2.

Para **aproximar por truncamiento** a una cifra determinada, la cifra considerada se deja igual y se elimina el resto.
El truncamiento de 25,8765 a los centésimos es 25,87.
El truncamiento de 32,235 a los décimos es 32,2.

Marquen la opción correcta

37. ¿Cuál es el valor de "n" para que 4! . n = n!?

- ◯ 3
- ◯ 4
- ◯ 5
- ◯ Ninguna de las anteriores.

38. En el desarrollo del binomio $(x + 1)^4$, ¿cuál es la suma de los coeficientes del 2.° y del 3.º términos?

- ◯ 10
- ◯ 8
- ◯ 6
- ◯ Ninguna de las anteriores.

39. ¿Cuál es el tercer término del desarrollo de $(a - 2)^4$?

- ◯ $24a^2$
- ◯ $-24a^2$
- ◯ $12a^2$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

40. Una turista quiere realizar un recorrido por 3 países elegidos entre 5 posibles. Si no importa en qué orden los visita, ¿cuántos recorridos posibles tiene?

- ◯ C_3^5
- ◯ V_3^5
- ◯ $P_5 . P_3$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

41. Si en el problema anterior, importa el orden de los recorridos, ¿cuántos recorridos posibles tiene?

- ◯ C_3^5
- ◯ V_3^5
- ◯ $P_5 . P_3$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

42. Se realizó un control de calidad sobre tres tipos de latas: "A", "B", "C", obteniendo los siguientes resultados:

Estado	Lata A	Lata B	Lata C	Total
Abolladas	15	40	35	90
No abolladas	140	210	150	500
Total	155	250	185	590

a. ¿Cuál es el porcentaje de latas no abolladas de la marca "A", aproximado al entero?

- ◯ 24%
- ◯ 22%
- ◯ 20%
- ◯ Ninguna de las anteriores.

b. ¿Cuál es el porcentaje de latas abolladas?

- ◯ 10%
- ◯ 16%
- ◯ 25%
- ◯ Ninguna de las anteriores.

c. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una lata al azar que no esté abollada?

- ◯ 0,84
- ◯ 0,75
- ◯ 0,5
- ◯ Ninguna de las anteriores.

d. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una lata no abollada si se sabe que es de la marca "C"?

- ◯ 0,2
- ◯ 0,81
- ◯ 0,9
- ◯ Ninguna de las anteriores.

e. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una lata de la marca "B" sabiendo que está abollada?

- ◯ $\frac{4}{9}$
- ◯ $\frac{5}{9}$
- ◯ $\frac{7}{9}$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

ISBN 978-987-764-472-2

www.puertodepalos.com.ar
argentina.infopuerto@macmillaneducation.com
/EditorialPuertodePalos
/editorialpuertodepalos